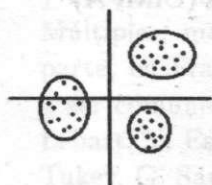


William Castillo – Javier Trejos  
Editores Científicos

# Estudios en Análisis de Datos y Estadística

Métodos factoriales, clasificación y estadística inferencial  
Modelos matemáticos y procesos estocásticos  
Optimización



Memorias del

*XI Simposio Internacional de Métodos Matemáticos Aplicados a las Ciencias*

Santa Clara, Costa Rica 11, 12 y 13 de febrero de 1998

Universidad de Costa Rica – Instituto Tecnológico de Costa Rica



## Contenido

---

### Clasificación automática

Comparación de estructuras de árboles de clasificación: un caso especial de comparación de relaciones $q$ -arias <i>Israël-César Lerman</i> (FRANCIA) .....	1
Matrices AVL para la clasificación y alineamiento de secuencias protéicas <i>Israël-César Lerman</i> (FRANCIA) .....	5
Geometrical hypothesis on clusters <i>Jean-Paul Rasson</i> (BÉLGICA) .....	10
Distancias con tres vías <i>Serge Joly y Georges Le Calvé</i> (FRANCIA) .....	28
Tipología de mamíferos ecuatorianos por pisos climáticos <i>Alfonso Castro</i> (ECUADOR) .....	35

### Métodos factoriales de análisis multivariado

Análisis factorial descriptivo con MATHEMATICA <i>William Castillo y Carlos Arce</i> (COSTA RICA) .....	36
Análisis exploratorio del crecimiento de la caña de azúcar <i>William Castillo y Jorge González</i> (COSTA RICA) .....	38
Un método multivariado para medir la satisfacción del cliente <i>Belmer García-Negrillo</i> (BRASIL) .....	40
Análisis de proximidades usando sobrecalentamiento simulado <i>Javier Trejos y Mario Villalobos</i> (COSTA RICA) .....	41
Comportamiento del peso gonadal en el estudio por sexo del pez <i>Dormitator latifrons</i> en Mata de Corozo, Pacora, Panamá <i>César Villareal, Aurora Mejía y Gonzalo Carrasco</i> (PANAMÁ) .....	53
Aplicación del análisis de factores en el estudio de los moluscos de los manglares de la Bahía de Chame, Panamá <i>Daniel Sánchez, Aurora Mejía y Marilyn Diéguez</i> (PANAMÁ) .....	59

## Estadística inferencial

Aspectos cognoscitivos de la percepción de inseguridad en los costarricenses <i>Mauricio Molina</i> (COSTA RICA) .....	68
Modelo de regresión lineal normal en las estimaciones poblacionales a nivel cantonal <i>Edwin Chaves</i> (COSTA RICA) .....	75
Aplicación de regresión censurada por medio del algoritmo EM en datos del cultivo del tempate <i>Danilo Padilla y Ana Cristina Rostrán</i> (NICARAGUA) .....	87
Análisis estadístico de dos experimentos en variedades de arroz. Uso del diseño de parcelas divididas y su combinado. <i>Sylvia Falla</i> (PERÚ) .....	89
Building local confidence intervals for the variogram through block-bootstrap <i>Angela Diblasi y Adrian Bowman</i> (ARGENTINA - REINO UNIDO) .....	90

## Probabilidades y procesos estocásticos

Estimación de la densidad para campos aleatorios <i>Michel Carbon</i> (FRANCIA) .....	91
Introducción a la integración estocástica <i>Santiago Cambronero</i> (COSTA RICA) .....	102
Separación ciega de señales aleatorias independientes <i>Phillipe Garat</i> (FRANCIA) .....	116
Identification of ARMA models using generalized reflection coefficients <i>Glaysar Castro</i> (VENEZUELA) .....	117
Teorema central del límite para medidas martingales con valores en un espacio de Hilbert <i>Héctor Pinto</i> (CHILE) .....	128

## Modelos matemáticos y simulación

Modelo aditivo vs modelo multiplicativo en el análisis de matrices multitrazos multimétodos <i>Jacques Juhel y Thierry Marivain</i> (FRANCIA) .....	135
Resolución numérica de problemas de contorno no lineales y sus aplicaciones <i>Sonia Palomino y Rafael Casali</i> (BRASIL) .....	137
Application of computer simulation in the study of local effects of atmospheric pollution in Southern Brazil <i>Sonia Palomino</i> (BRASIL) .....	144

Un modelo de simulación de los resultados de un torneo de fútbol <i>Eduardo Piza</i> (COSTA RICA) .....	145
Diseño del modelo matemático para producir huevos de <i>Sitotroga cerealella</i> en la UNAN-León <i>Enilda Cano, Mirna Ortiz y Ana Cristina Rostrán</i> (NICARAGUA) .....	156
Scenario development, qualitative causal analysis and system dynamics <i>Michael Ruge, H. Kessler, A. Singh y S. Hejazi</i> (ALEMANIA - ESTADOS UNIDOS) .....	158

## Redes neuronales

Sintonización con redes neuronales de un controlador PID aplicado a una unidad de turbogas <i>Marco Antonio Pat y Salvador De Lara</i> (MÉXICO) .....	159
An application of fuzzy cognitive maps for studying labor climate systems <i>Arturo Aguilar y José Romero</i> (MÉXICO) .....	168
Comparación de modelaje utilizando redes neuronales de regresión general y relaciones no lineales de regresión para determinar la resistencia de trabajo de motores eléctricos <i>Sergio de los Cobos, C. Goddard, I. Jasso, B. R. Pérez y M. A. Gutiérrez</i> (MÉXICO) ....	178

## Optimización

Optimización paramétrica (singularidades, continuación de caminos y saltos) y algunas aplicaciones <i>Jürgen Guddat</i> (ALEMANIA) .....	185
Una versión profesor-grupo-aula del problema de horarios <i>Ramiro Cáceres</i> (NICARAGUA) .....	186
Asignaciones de cursos en aulas <i>Alex Murillo, Alcadío Vergara y Ramón Sáenz</i> (COSTA RICA) .....	187
Esquemas comparativos de la búsqueda tabú para el problema de asignación cuadrático <i>Sergio de los Cobos, C. Goddard, M. A. Gutiérrez y B. R. Pérez</i> (MÉXICO) .....	197
Fuzzy mathematical programming applied to the capital budgeting problem <i>José C. Romero y Arturo Aguilar</i> (MÉXICO) .....	209
Conjuntos aproximados y algoritmos genéticos <i>José Luis Espinoza</i> (COSTA RICA) .....	215
Human resource optimization <i>Sternemann, Spoeri, Fritsch y Milena Didic</i> (ALEMANIA) .....	224

## Otras aplicaciones

Sincronización de flujo multimedia por la aplicación de relaciones causales <i>Raúl Jacinto, Raúl García y Roberto Gómez</i> (MÉXICO) .....	225
Benchmark systems for product eco-balance and eco-controlling <i>Milena Didic, U. Mampel y M. Stremper</i> (ALEMANIA) .....	227
Métodos matemáticos utilizados en sistemas de información geográfica <i>Silvia Casas</i> (MÉXICO) .....	228
Bounds for the number of partitions of an integer number <i>Juan Boza</i> (COSTA RICA) .....	229
Indiferencia y medida <i>María Isabel Ashaw</i> (PANAMÁ) .....	237
Una introducción a los fractales <i>Manuel Murillo y Alberto Soto</i> (COSTA RICA) .....	244

## Enseñanza de la estadística

Diseño del tema “Pruebas no Paramétricas” correspondiente a la asignatura Estadística y Diseño de Experimentos en Ingeniería Civil <i>Carlos Alberto García</i> (CUBA) .....	247
Estadística en el nivel primario y su relación con las demás áreas del conocimiento <i>Roxana Yudewitz y Myriam Herrera</i> (ARGENTINA) .....	254
Hagamos Matemáticas y Estadística a partir del método Ocreso <i>Gerardo Araya y Pablo Mena</i> (COSTA RICA) .....	255

# COMPARACIÓN DE ESTRUCTURAS DE ÁRBOLES DE CLASIFICACIÓN: UN CASO ESPECIAL DE COMPARACIÓN DE RELACIONES $q$ -ARIAS\*

ISRAËL-CÉSAR LERMAN †

---

## Resumen

La comparación de relaciones  $q$ -arias sobre un conjunto  $\mathcal{O}$  de objetos elementales, es uno de los problemas más fundamentales de la Clasificación y el Análisis Combinatorio de Datos. La comparación de las estructuras de árboles de clasificación (binarios o no) es estudiada en este contexto teniendo en cuenta la especificidad de estas estructuras. Dos representaciones matemáticas son propuestas. La primera corresponde a una relación binaria valuada; y la segunda, a una relación 4-aria. En estas condiciones, los enfoques más clásicos de comparación de árboles, están situados relativamente en una representación conjuntista de estas relaciones. Nosotros presentamos los aspectos de cálculo formal y combinatorio, de un método de construcción de una familia muy general de coeficientes de asociación entre relaciones. El objetivo principal de este artículo consiste en especificar las componentes de esta construcción fundamentada en un modelo permutacional, cuando las estructuras a comparar son árboles de clasificación.

---

\*En las presentes memorias aparecen publicados nicamente el resumen, la introducción y la bibliografía de este artículo. Los lectores interesados en el trabajo completo pueden solicitarlo a los editores o al autor.

†Institut de Recherche en Informatique et Systèmes Aléatoires (IRISA), Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, Francia.

**Palabras-clave:** árboles de clasificación, relaciones, representación matemática, modelo aleatorio permutacional.

### Abstract

Comparing  $q$ -ary relations on a set  $\mathcal{O}$  of elementary objects is one of the most fundamental problems of classification and combinatorial data analysis. In this paper the specific comparison task that involves classification tree structures (binary or not) is considered in this context. Two mathematical representations are proposed. One is defined in terms of a weighted binary relation; the second uses a four-ary relation. The most classical approaches to tree comparison, are discussed in the context of a set theoretic representation of these relations. Formal and combinatorial computing aspects of a construction method for a very general family of association coefficients between relations are presented. The main purpose of this article is to specify the components of this construction, based on a permutational procedure, when the structures to be compared are classification trees.

**Keywords:** Classification tree; relations; mathematical representation; random permutational model.

## 1 Introducción

La comparacin de relaciones  $q$ -arias en un conjunto  $\mathcal{O}$  de objetos elementales es uno de los problemas ms fundamentales de la Clasificacin y Anlisis Combinatorio de Datos. Interviene crucialmente en los diferentes niveles de un proceso de sntesis de datos. Luego, variables descriptivas de cualquier tipo, numricas o categricas (eventualmente provistas de una compleja estructura en el conjunto de categoras), pueden ser claramente expresadas en trminos de una relacin sobre  $\mathcal{O}$ . Por otro lado, un resultado en anlisis de datos (clasificacin, clasificacin jerrquica, representacin eucldea, ...) tambin define una relacin sobre  $\mathcal{O}$ . Entonces un esquema de anlisis de datos es visto tomando en cuenta una coleccin de relaciones, para producir una relacin aproximada global de un tipo predefinido. Sin embargo, debemos distinguir claramente entre los dos problemas duales: objetos de asociacin descritos por variables relacionales y relaciones de asociacin observadas sobre objetos elementales o clases de objetos. Una ltima etapa hace correspondencia entre estos dos tipos de asociacin a travs de un forma dada de estructura de sntesis (p. ej. clasificacin jerrquica). Para cualquier entero positivo dado  $q$ , consideramos relaciones  $q$ -arias de comparacin, sobre la base de la observacin de un

conjunto de objetos  $\mathcal{O}$ . De hecho, una gran literatura en Anlisis de Datos Combinatorio (ADC) est dedicada a los casos  $q = 1$  ó  $q = 2$ . En este ltimo caso, no se ha prestado suficiente atencin para tomar en cuenta la estructura especfica de las relaciones comparadas. Por tanto, la reduccin que se hace en el artculo de Fowlkes & Mallows (1983), para comparar dos rboles de clasificacin no puede ser justificada claramente. Por otro lado, Baker (1974) usa el coeficiente de Goodman-Kruskal (1954) para este propsito. Sin embargo, la generalidad de este coeficiente no lo hace suficientemente preciso para las estructuras concernidas. El mtodo general que nosotros hemos puesto a punto (Lerman (1992)), tiene su origen en las contribuciones de K. Pearson y M. G. Kendall. Se acerca al trabajo de Hubert (1987) y hace comprensiva una gran familia de coeficientes. Pero el enfoque est ms relacionado con una visin de la teora de la informacin que con la estadstica de pruebas de hipotesis. Por otro lado, la naturaleza combinatoria del problema de asociacin es enfatizado y tomado claramente en cuenta.

Por razones de claridad, primero consideramos el caso ms elemental y clsico de comparacin de variables numricas ( $q = 1$ ). El caso principal tratado concierne la construccin de un coeficiente de asociacin entre rboles de clasificacin. Las componentes de esta construccin son especificadas en el marco de nuestro esquema general. Para este propsito, dos representaciones matemticas son consideradas. La primera es definida mediante un relacin binaria de ponderacin, usando una funcin de graduacin. Puede estar relacionada -de alguna manera- con el enfoque de Spearman. Mientras tanto, la segunda representacin puede ser asociada al enfoque de Kendall y necesita la definicin de una relacin 4-aria sobre  $\mathcal{O}$ .

Deben introducirse nociones formales, asociadas con la forma de un rbol de clasificacin. Por otra lado, el presente trabajo tiene un gran contenido de clculo combinatorio.

Finalmente, consideraremos el caso ms general de comparacin de relaciones  $q$ -arias, para cualquier  $q$ .

## Referencias

- [1] Baker, F.B. (1974) "Stability of two hierarchical grouping techniques", *Journal of the American Statistical Association* **69**: 440–445.
- [2] Daniels, H.E. (1944) "The relation between measures of correlation in the universe of sample permutations", *Biometrika* **33**: 129–135.



- [3] Daude, F. (1992) *Analyse et Justification de la notion de Ressemblance dans l'Optique de la Classification Hiérarchique par AVL*. Thèse de l'Université de Rennes I.
- [4] Fowlkes, E.B.; Mallows, C. L. (1983) "A method for comparing two hierarchical clusterings", *Journal of the American Statistical Association* **78** 533–584.
- [5] Goodman, L.A.; Kruskal, W.H. (1954) "Measures of association for cross classification", *Journal of the American Statistical Association* **49**: 732–764.
- [6] Hájek, J.; Sidak, Z. (1967) *Theory of Rank Test*. Academic Press, London.
- [7] Hamann, V. (1961) "Mermalbestand und Verwandtschaftsbeziehungen der farinosae. Ein Beitrag zum System der MonoKotyledonen", *Willdenowia* **2**: 639–768.
- [8] Hubert, L.J. (1983) "Interference procedures for the evaluation and comparison of proximity matrices", *Numerical Taxonomy*, J. Felsenstein (ed.), NATO ASI Series, Berlin, Springer-Verlag.
- [9] Hubert, L.J. (1987) *Assignment Methods in Combinatorial Data Analysis*. Marcel Decker, New York.
- [10] Jovicic, A. (1996) "Minimal entropy algorithm for solving node problems", IFCS- 96, *Data Science Classification and Related Methods*, Abstracts Vol.2: 115–116.
- [11] Lapointe, F.J.; Legendre, P. (1995) "Comparison tests for dendrograms: a comparative evaluation", *Journal of Classification* **12**: 265–282.
- [12] Le Calvé, G. (1976) "Un indice de similarité pour des variables de types quelconques", *Statistique et Analyse des Données*, 01-02: 39–47.
- [13] Lerman, I.C. (1970) *Les Bases de la Classification Automatique*. Gauthier-Villars, Collection Programmation, Paris.
- [14] Lerman, I.C. (1977) "Formal analysis of a general notion of proximity between variables", Congrès Européen des Statisticiens, Grenoble 1976, *Recent Developments in Statistics*, North Holland, 787–795.

- [15] Lerman, I.C. (1987) “Justification et validité statistique d’une échelle $[0, 1]$  de fréquence mathématique pour une structure de proximité sur un ensemble de variables observées”, *Publications de l’Institut de Statistique de l’Université de Paris*, XXIX, fasc.3-4: 27–57.
- [16] Lerman, I.C. (1987) “Maximisation de l’association entre deux variables qualitatives ordinales”, *Revue Mathématiques et Sciences Humaines* **100** 49–56.
- [17] Lerman, I.C. (1989) “Formules de réactualisation en cas d’agrégations multiples”, *RAIRO*, série R.O, **23**(2): 151–163.
- [18] Lerman, I.C. (1992) “Conception et analyse de la forme limite d’une famille de coefficients statistiques d’association entre variables relationnelles”, I and II : *Revue Mathématiques Informatique et Sciences Humaines*, I: **118**: 35–522, II: **119**: 75–100.
- [19] Lerman, I.C. (1993) “Likelihood linkage analysis (LLA) classification method (around an example treated by hand)”, *Biochimie* **75**, Elsevier Editions: 379–397.
- [20] Lerman, I.C.; Ghazzalli, N. (1991) “What do we retain from a classification tree? An experiment in image coding”, *Symbolic -Numeric Data Analysis and Learning*, E. Diday & Y. Lechevallier (eds.), Nova Science Publishers, 27–42.
- [21] Lerman, I.C.; Peter, Ph. (1988) “Structure maximale pour las somme des carés d’une contingence aux marges fixées; une solution algorithmique programmée”, *RAIRO* série R.O., **22**(2): 83–136.
- [22] Mantel, N. (1967) “Detection of disease clustering and a generalized regression approach”, *Cancer Research* **2**(2): 209–220.
- [23] Messatfa, H.(1990) *Unification Relationnelle des Criteriées et Structures Optimales des Tables de Contingence*. Thèse de Doctorat de l’Université de Paris 6.
- [24] Messatfa, H. (1992) “An algorithm to maximize the agreement between partitions”, *Journal of Classification* **9**: 5–15.
- [25] Ochiai, A. (1957) “Zoogeographic studies on the soleoid fishes found in Japan and its neighbouring regions”, *Bull. Jap. Soc. Sci. Fish*, T22: 526–530.

- [26] Ouali-Allah, M. (1991) *Analyse en Preordonnances des Données Qualitatives, Applications aux Données Numériques et Simboliques*. Thèse de Doctorat de l'Université de Rennes I.
- [27] Sokal, R.R., and Rohlf, F.J. (1962) "The comparison of dendograms by objective methods", *Taxon* **11**: 33–44.
- [28] Yule, G.U. (1912) "On the methods of measuring the association between two attributes", *Journal Royal Statistical Society* **75**: 579–625.

## MATRICES AVL PARA LA CLASIFICACIÓN Y ALINEAMIENTO DE SECUENCIAS PROTÉICAS\*

ISRAËL-CÉSAR LERMAN †

---

### Resumen

Las matrices de Dayhoff de comparación por pares entre aminoácidos, ha jugado un papel crucial para alimentar la investigación bioinformática. Puede tratarse de alinear una familia de secuencias protéicas, via algoritmos del tipo “programación dinámica”. También puede tratarse de la información “Similitud” para la clasificación de tales secuencias, después de alineamiento prealable o sin éste. Aunque una nueva matriz llamada BLOSUM 62 es también considerada ahora por los biólogos, su naturaleza estadística es la misma que la de Dayhoff, cuyo principio de obtención es más ambicioso pero menos robusto. Un primer objetivo de este trabajo es explicitar las concepciones de cada una de estas matrices comparándolas. También proponemos dos nuevas matrices que están respectivamente asociadas, pero que son conformes a la metodología del Análisis de Verosimilitud del Ligamen (AVL). Las cuatro matrices son comparadas a través de la clasificación AVL, sobre un conjunto alineado de 89 secuencias protéicas de citocroma *C*. Damos a la codificación de la información Similitud dos formas: “grafo valuado”

---

\*En las presentes memorias aparecen publicados nicamente el resumen, la introducción y la bibliografía de este artículo. Los lectores interesados en el trabajo completo pueden solicitarlo a los editores o al autor.

†Institut de Recherche en Informatique et Systèmes Aléatoires (IRISA), Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, Francia.

y “preordenación”. Si el alineamiento mencionado es realizado a partir de consideraciones estructurales, las nuevas matrices permiten un alineamiento múltiple vía algoritmos del tipo programación dinámica y agregación según el vecino más cercano.

**Palabras clave:** similitud, clasificación, secuencias genéticas.

### Abstract

The Dyhoff matrix of amino acids pairwise comparison has played a crucial part in computing biology research. Two main and related problems are concerned: Alignment and Classification. A new matrix called BLOSUM 62, is now equally considered by the Biologists. However, its statistical nature is exactly the same as that of Dayhoff matrix. Nevertheless, the respective elaborations of both matrices, are fundamentally distinct. Our first aim in this paper, is to make clear the formal comparison between the respective conceptions of the two matrices. An important objective consists also of proposing two new matrices associated with the previous ones, according Likelihood Linkage Analysis (LLA) methodology. The four matrices are evaluated through LLA classification, on a set of aligned genetic sequences. The training set is provided by 89 protein sequences, aligned according structural considerations. Two representations are considered for the Similarity coding: “weighted graph” and “preordonance”. Both new matrices enable new results in Classification and multiple Alignment, through dynamic programming and clustering algorithms.

**Keywords:** similarity, classification, genetic sequences.

## 1 Introducción

En el campo de la Biología Molecular, la clasificación de secuencias de proteínas conforme a sus “proximidades” respectivas, es crucial para inducir el conocimiento [7].

Formalmente, los elementos que deben organizarse según un esquema clasificatorio son sucesiones de letras que provienen de un alfabeto finito  $A$ . Estas sucesiones tienen longitudes respectivas diferentes; por otra parte, el alfabeto  $A$  contiene 20 letras, que representan cada una a un aminoácido.

Las diferencias respectivas de longitud son justificadas, en la teoría de la evolución, por un fenómeno de borrado o inserción de aminoácidos en una misma secuencia proteica, durante el tiempo. Introduciendo un símbolo especial denotado  $-$  y que representa un “salto”, las secuencias proteicas de una

misma familia (p. ej. el citocroma  $C$ ) pueden ser potencial y mutuamente alineadas (alineamiento múltiple); el alfabeto utilizado ( $A \cup \{-\}$ ) comprende as 21 letras. Precisamente, uno de los objetivos mayores de la investigación en Biología Molecular consiste en validar los alineamientos múltiples.

Un alineamiento múltiple puede ser obtenido de diferentes maneras. Para cada una, y si se limita a la comparación de un solo par de secuencias, lo que interviene de manera fundamental es una *comparación de un término residuo de la primera secuencia con un término residuo de la segunda secuencia*. En estas condiciones, dos problemas esenciales y ligados se presentan: ¿cómo hacer corresponder los dos términos y cuál noción de similitud usar para la comparación?

En vista de esto último, diferentes nociones que se refieren a diferentes puntos de vista pueden ser consideradas [3]. Sealemos enseguida que nuestra experiencia de clasificación reportada aquí trata de un conjunto de 89 secuencias proteicas del citocroma  $C$ , prealineadas a partir de consideraciones ligadas a la estructura. Conforme con este punto de vista, se establece bien en [16] una matriz de asociación entre aminoácidos; pero, nosotros no la utilizaremos aquí. De manera precisa, el alineamiento múltiple ha sido realizado siguiendo el método de Sander (C. Sander & R. Schneider 1991) y extraído del banco de datos HSSP distribuido por la EMBL. De esta forma, la evaluación de nuestras matrices de comparación entre aminoácidos, vía clasificación jerárquica AVL (Análisis de la Verosimilitud del Ligamento) [10], [14], ser perfectamente independiente del método de construcción del alineamiento múltiple.

En efecto, dada una matriz de similitudes numéricas entre aminoácidos permite, vía la programación dinámica y un algoritmo de agrupamiento por proximidades (cf. referencias 6 a 12 de [7]), realizar -a partir de un principio de parcimonia- un alineamiento múltiple. Es así que la célebre matriz de Dayhoff ha alimentado particularmente los algoritmos de alineamiento.

Precisamente, la primera matriz que proponemos ser deducida a partir de la correspondiente a 250 PAM, conforme con el método de construcción de Dayhoff, y obtenida por Jones, Taylor y Thornton [6]. La denotaremos por  $D$ . Por otra parte, una nueva familia de matrices, llamada BLOSUM y debida a [5], es cada vez más considerada por los biólogos. Si la elaboración de una matriz BLOSUM difiere sensiblemente de la de una de Dayhoff, su naturaleza estadística es la misma. Un mismo elemento representa, en efecto, en cada caso el logaritmo de una densidad de probabilidad. En esta segunda familia, la matriz estándar es BLOSUM 62, que entonces conducirá a la segunda matriz que nosotros proponemos. En la sección II estudiaremos las concepciones respectivas de la matriz de Dayhoff y de la de Henikoffs.

Luego, después de un análisis comparativo, mostraremos cómo deducimos las matrices, respectivamente asociadas, de índices probabilísticos que podemos llamar  $AVL(D)$  y  $AVL(B)$ ; o las de “dismilitud informacional”, directamente deducidas.

Después de haber inferido, a partir de una misma matriz, los valores de las similitudes entre los 20 aminoácidos y un salto, así como entre dos saltos, nos será posible construir un índice de similitud entre secuencias proteicas mutuamente alineadas, conforme con el método AVL.

Con este propósito, dos enfoques se pueden plantear. El primero es numérico y consiste en considerar que la variable asociada a un sitio es un grafo valuado completo sobre el conjunto  $A'$  de 21 letras (que representa los 20 aminoácidos y el salto). El segundo enfoque es ordinal y consiste en guardar de la valuación numérica únicamente el preorden total que induce sobre el conjunto de parejas de letras; se trata de un preorden sobre  $A'$ . En la sección III describiremos esta construcción.

Dada una familia de secuencias proteicas, ya prealineadas y “lo mejor”, un primer objetivo mayor de la investigación es encontrar una codificación de la información similitud -para una comparación sitio por sitio- que conduzca, por el método AVL, a los resultados más coherentes, teniendo en cuenta el conocimiento adquirido en filogenia. En efecto, un buen nivel de coherencia permitirá a la herramienta constituirse en una ayuda en la inferencia en las situaciones menos familiares.

Por otra parte y de manera ligada, se pueden comparar diferentes alineamientos por la calidad de las clasificaciones asociadas.

El punto de partida de la construcción de una matriz tipo Dayhoff o Blossum, y por lo tanto también AVL, es un conjunto de secuencias ya alineadas, o bien, una familia de tales conjuntos. Tales alineamientos son efectuados a partir de un conocimiento a priori, mezclado con aspectos algorítmicos de comparaciones simples. Pero estas mismas matrices pueden servir -vía la programación dinámica- para alinear un conjunto de secuencias, ya sea que se trate de uno de los que hemos partido o de uno nuevo. Y, para ello, se ha podido reprochar una cierta circularidad en el razonamiento. Discutiremos este punto en la conclusión; sobre todo, haciendo intervenir el aporte y aclaración que provee la herramienta clasificación (sección IV).

La sección V está consagrada al análisis de diferentes tratamientos efectuados y a las comparaciones de los resultados. Esto nos permitirá fijar una estrategia AVL para la clasificación de un conjunto de secuencias proteicas alineadas, con una comparación sitio por sitio.

Este no es el único tipo de comparación visto en [12], que constituye una

primera experiencia y que motivó el presente estudio.

## Referencias

- [1] Day, W.H.E; Mac Morris, F.R. (1993) "Alignement, Comparison, and Consensus of Molecular Sequences: A Bibliography", *Proceed. of the International Federation of Classification Societies*, 1-4 Sept, Springer Verlag.
- [2] Dayhoff, M.O.; Eck, R.V.; Park, C.M (1972) *In Atlas of Protein Sequence and Structure*. vol.5, pp.89–99.
- [3] George, D.G.; Barker, W.C.; Hunt L.T. (1990) "Mutation Data Matrix and Its Uses", *Methods in Enzymology* **183** Academic Press: 313–330.
- [4] Gonnet, G.H. (1992) *A Tutorial Introduction to Computational Biochemistry using Darwin*. Report, Informatik E.T.H ., Zurich, Switzerland, Nov. 24, 180 pages.
- [5] Henikoff, S.; Henikoff, J.G. (1992) "Amino acid substitution matrices from protein blocks", *Proceed. Natl.Acad. Sci.*, Biochemistry, USA, **89**: 10915–10919.
- [6] Jones, D.T.; Taylor, W.R.; Thornton (1992) "The rapid generation of mutation data matrices from protein sequences", *Cabios* **8**(3): 275–282.
- [7] Landès, C.; Hénault, A.; Risler, J.L. (1992) "A comparison of several similarity indices used in the classification of protein sequences: a multivariate analysis", *Nucleic Acids Research* **20**: 3631–3637.
- [8] Lerman, I.C. (1981) *Clasificación et Analyse Ordinale des Données*. Dunod, Paris, 760 páginas.
- [9] Lerman, I.C. (1992) "Conception et analyse de la forme limite d'une famille de coefficients statistiques d'association entre variables relationnelles I et II", *Rev.Math. Infor. et Sci.Hum.*, 30<sup>e</sup> année; I:n.118, pp.35–52, II:n.119, pp.75–100, Paris.
- [10] Lerman, I.C. (1993) "Likelihood linkage analysis (LLA) classification method: an example treated by hand", *Biochimie* **75** Elsevier Editions: 379–397.



- [11] Lerman, I.C.; Grass, R.; Rostam, H. (1981) “Elaboration et évaluation d’un indice d’implication pour des données binaires, I et II”, *Rev. Math. Infor. et Sci. Hum.*, 19<sup>e</sup> année; I:n.74, pp.5–35, II: n.75, pp.5–47, Paris.
- [12] Lerman, I.C.; Nicolas, J.; Tallur, B.; Peter, Ph. (1993) “Clasification of aligned biological secuencias”, *Proceed. of International Federation of Clasification Societies*, 1-4 Sept, Springer Verlag.
- [13] Lerman, I.C.; Peter, Ph. (1985) *Elaboration et logiciel d’un indice de similarité entre objets d’un type quelconque. Application à la recherche d’un consensus en clasification*. Publ. Int. IRISA. n.262, Juillet 1985, 72 pages.
- [14] Lerman, I.C.; Peter, Ph.; Leredde, H. (1993) “Principes et calculs de la méthode implantée dans le programme CHAVL (Classificacion Hièrarchique par Analyse de la Vraisemblance des Liens) I et II”, *La Revue de Modulad*, I: Déc.1993, numéro 12, pp.37–70, II: 1994, numéro 13, INRIA.
- [15] Ouali-Allah, M. (1991) *Analyse en Préordonnances des Données Qualitatives. Applications aux Données Numériques et Symboliques*. Thèse de Doctorat de l’Université de Rennes I.
- [16] Risler, J.L.; Delorme, M.O.; Delacroix, H.; Henaut, A. (1988) “Aminoacid substitutions in structurally proteins: a pattern recognition approach. Determination of a new and efficient scoring matrix”, *Journal of Molecular Biology* **204**: 1019–1029.

XI SIMPOSIO INTERNACIONAL DE MÉTODOS MATEMÁTICOS APLICADOS A LAS CIENCIAS  
W. Castillo & J. Trejos (eds.), SANTA CLARA, COSTA RICA 11-13 FEBRERO 1998  
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA - INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA: 10-27

## GEOMETRICAL-HYPOTHESIS ON CLUSTERS

JEAN-PAUL RASSON\* - DIDIER JACQUEMIN\* - VINCENT BERTHOLET\*

### Abstract

In this paper, we propose a new clustering method and a new discriminant rule valid on the basic space  $\mathbb{R}^2$ . These procedures make use of a new concept in clustering: the concept of closed and connex forms. This hypothesis generalizes the convex hypothesis and is very useful to find non convex natural clusters.

Finally, we examine the admissibility of our new procedure, in the sense of Fisher and Van Ness [6].

**Keywords:** cluster analysis, discriminant analysis, Lebesgue measure, stationary point process, hypervolume method, replacing the convexity, non convex case, connex and closed domains, optimal closing, admissibility conditions.

### Resumen

En este artículo, proponemos un nuevo método de clasificación y una nueva regla de discriminación válida en el espacio  $\mathbb{R}^2$ . Estos procedimientos usan de un nuevo concepto en clasificación automática: el concepto de formas cerrada y conexa. Esta hipótesis generaliza la hipótesis convexa y es muy útil para encontrar clases naturales no convexas.

Finalmente, examinamos la admisibilidad de nuestro nuevo procedimiento, en el sentido de Fisher y Van Ness [6].

**Palabras clave:** clasificación automática, análisis discriminante, medida de Lebesgue, proceso de punto estacionario, método de los hipervolumenes, reemplazar la convexidad, caso no convexo, dominios conexo y cerrado, cerradura óptima, condiciones de admisibilidad.

### Introduction

In the framework of the research of clustering by partition, none method can be defined as "the best clustering method".

\*Département de Mathématique, Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix, 8 Rempart de la Vierge B-5000 Namur, Belgique; Tel : +(32) (81) 72.49.33 (Office) Fax : +(32) (81) 72.49.14 (Dept. Math); e-mail: Didier.Jacquemin@fundp.ac.be

We can however easily see that many of them are based on a distance. To avoid the arbitrary choice of distances, similarities and dissimilarities always posed in classification problems, we use in this paper a statistical method based on the Poisson point process. So, the Lebesgue measure which is both the canonical measure of the classification space  $\mathbb{R}^d$  and the measure induced by the Poisson point process ("the natural model for points distributed at random" (Fisher (1972) [7], Cressie (1991) [4],...)) will be considered here.

The starting point of this article is the recall of a method based on the Stationary Point Process and on the Lebesgue measure: The Hypervolume method, proposed by Hardy and Rasson (1982) [8]. This method, assuming that the number of clusters (let us say  $k$ ) is fixed beforehand, was based on the assumption of  $k$  CONVEX clusters. The concept of clustering models for convex clusters has been analysed by Bock (1997) [2].

By the definition of the Hypervolume method, such a method is not able to find natural non convex clusters. So, we judged the hypothesis of convexity too strong, and desired a hypothesis which would also allow us to find natural non convex clusters. We used then the notion of *connex and closed* forms to solve this problem.

The method based on this new hypothesis is developed: As the hypervolume method, it is based on the Stationary Point Process and on the Lebesgue measure and requires to know the number of clusters ( $k$ ) beforehand.

We also expose the corresponding discriminant rule (after recalling the one corresponding to the convex case) and sift the procedure to the Fisher and Van Ness conditions (1971) [6] which "eliminate obviously bad clustering algorithms".

We restrict ourselves in this paper in examining only the 2-dimensional case, but extension to  $\mathbb{R}^d$  is straightforward.

## 1 Problem definition

The main problem in cluster analysis can be formulated as:

Given a set  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  containing  $n$  objects, determine subsets of it, called clusters in such a way that objects in the same cluster are similar and different from the objects in the other clusters.

In this paper, we suppose that the objects to be clustered are quantitative and represented by  $n$  data points  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  inside some domain  $D$  which is a subset of the 2-DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE  $\mathbb{R}^2$ .

So, we are only concerned by points in the plane.

## 2 Replacing the hypothesis of convexity

Before exposing our point of view, let us first recall a method based on the hypothesis of convexity: The Hypervolume method.

## 2.1 The Hypervolume criterion

We will expose briefly the method and its main result. The reader is referred to Hardy and Rasson (1982) [8] who proposed the criterion. For details about the Point Processes theory, see Karr (1991) [9] or Krickeberg (1982) [10].

Suppose that we observe  $n$  data points  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  inside some unknown domain  $D \subseteq \mathbb{R}^d$ . The goal is to find out the natural classes present in the data, assuming that their number is  $k$  ( $k$  is fixed beforehand). We consider that the  $n$  observations to classify  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  are a realization of a stationary Poisson point process (see below) in a domain  $D$  of  $\mathbb{R}^d$  which is the union of  $k$  disjoint CONVEX compact subdomains  $D_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) (with  $D_i$  unknown for all  $i$ ).

### The stationary Poisson point process.

Consider  $N(A) \stackrel{\text{def}}{=} N(A)$  the (random) number of points in the set  $A$ .

$N$  is a Poisson Process on  $\mathbb{R}^d$  if

1. When the sets  $A_1, \dots, A_k \subseteq \mathbb{R}^d$  are disjoint, the random variables  $N(A_1), \dots, N(A_k)$  are independant.
  2.  $\forall A \subseteq \mathbb{R}^d$  and  $k \geq 0$ ,  $P(N(A) = k) = e^{-\mu(A)} \frac{(\mu(A))^k}{k!}$ .
- By convention,  $N(A) = \infty$  if  $\mu(A) = \infty$ .

$N$  is a stationary Poisson process on  $\mathbb{R}^d$  if

1.  $N$  is a Poisson process on  $\mathbb{R}^d$ .
2.  $\mu(A) = \rho \lambda_d(A)$  where  $\lambda_d(A)$  is the  $d$ -dimensional Lebesgue measure of  $A$  and  $\rho \in ]0, \infty[$ .

### Statistical solution

The aim is to estimate the  $k$  subsets  $D_1, \dots, D_k$ .

The indicator function of the set  $A$  at the point  $y$  is defined by

$$1_A(y) = \begin{cases} 1 & \text{if } y \in A, \\ 0 & \text{if } y \notin A. \end{cases}$$

With our hypothesis, the points will be independently and uniformly distributed on  $D$  and the Likelihood function will take the form:

$$f_D((x_1, \dots, x_n)) = \prod_{i=1}^n \frac{1_D(x_i)}{\lambda_d(D)} = \frac{1}{(\lambda_d(D))^n} \prod_{i=1}^n 1_D(x_i)$$

where  $\lambda_d(D) = \sum_{i=1}^k \lambda_d(D_i)$  is the  $d$ -dimensional Lebesgue measure of  $D$ .

So, applying the maximum likelihood method, the domain  $D$  for which the likelihood is maximal is, among all those which contain all the points, the one whose Lebesgue measure is minimal.

If we now use our hypothesis of convexity of the  $k$  subdomains, we find that for each partition of the set of points into  $k$  subdomains having DISJOINT convex hulls, the likelihood has a local maximum attained with the convex hulls of the  $k$  subsets.

The global maximum (the one we seek) will then be attained with the partition for which the sum of the Lebesgue measures of the convex hulls of the  $k$  subgroups is minimal.

The hypervolume criterion  $W(P_k)$  is defined as follows:

$$W : \mathcal{P}_k \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$P = \{C_1, \dots, C_k\} \rightsquigarrow W(P, k) = \sum_{i=1}^k \lambda_d(H(X_i))$$

where

- $\mathcal{P}_k$  is the set of all partitions of the domain  $D$  into  $k$  convex domains  $C_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ).
- $P = \{C_1, \dots, C_k\}$  is an element of  $\mathcal{P}_k$ .
- $\lambda_d$  is the  $d$ -dimensional Lebesgue measure of  $H(X_i)$ .
- $H(X_i)$  is the convex hull of the data points  $X_i$  inside the convex domain  $C_i$ .

In particular, when we deal with a clustering problem in  $\mathbb{R}^2$ , it consists in finding out the partition which minimizes the sum of the AREAS of the convex hulls of the points of the classes.

## 2.2 The closed hypothesis

The hypothesis of convexity used in the hypervolume method will be generalized here thanks to the notions of CLOSINGS and CLOSED sets, defined in Schmitt and Mattioli (1993) [13], Matheron (1975) [11] or Stoyan and Stoyan (1994) [16].

### Definitions and examples

Consider 2 sets  $X$  and  $B$ .

1. The *translate* of  $B$  by  $u$  is :

$$B_u \stackrel{\text{def}}{=} \{u + b, b \in B\}.$$

2.  $\check{B}$  is the symmetric of  $B$  by the origin :

$$\check{B} \stackrel{\text{def}}{=} \{-b, b \in B\}.$$

3. The *dilation* of the set  $X$  by the set  $B$ , noted  $X \oplus \check{B}$ , is

$$X \oplus \check{B} \stackrel{\text{def}}{=} \{u, X \cap B_u \neq \emptyset\}.$$

Another formula can be found thanks to this definition:

$$X \oplus \check{B} = \bigcup_{b \in \check{B}} X_b.$$

4. The *erosion* of  $X$  by  $B$ , noted  $X \ominus \check{B}$ , is defined as:

$$X \ominus \check{B} \stackrel{\text{def}}{=} (X^c \oplus \check{B})^c.$$

We can also find this formulation of the erosion:

$$X \ominus \check{B} = \{u, B_u \subset X\}.$$

Or:

$$X \ominus \check{B} = \bigcap_{b \in \check{B}} X_b.$$

5. The *closing* of  $X$  by  $B$  is noted  $X^B$  and is defined as:

$$X^B \stackrel{\text{def}}{=} (X \oplus \check{B}) \ominus B,$$

which is the same (thanks to the above formulas (see Schmitt and Mattioli (1993) [13])) as

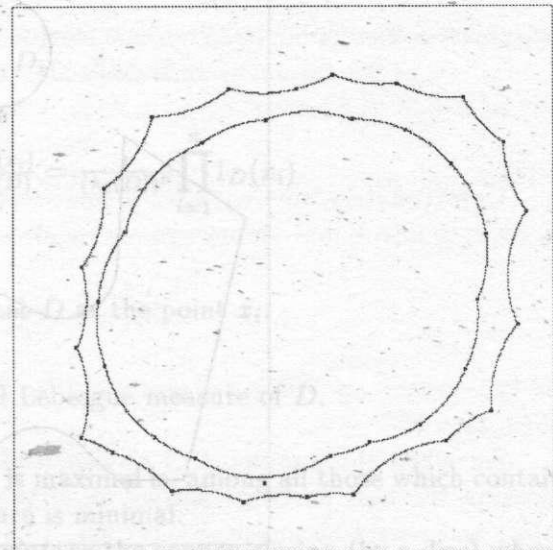
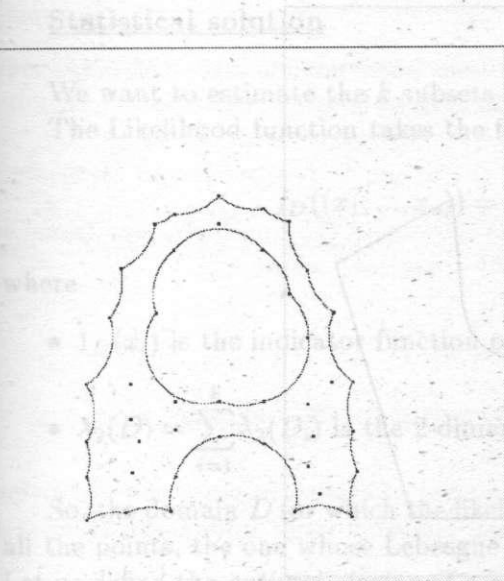
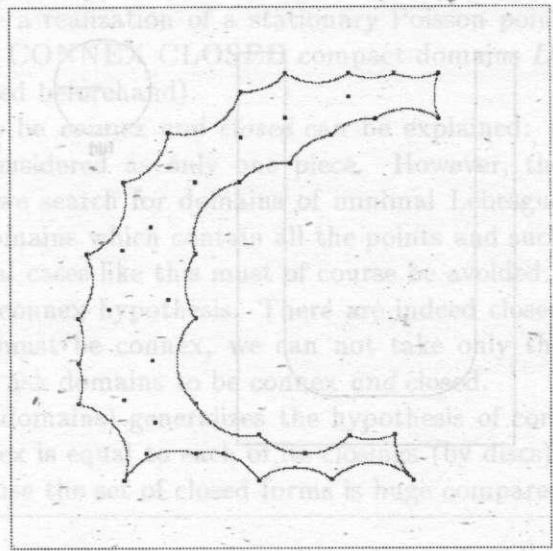
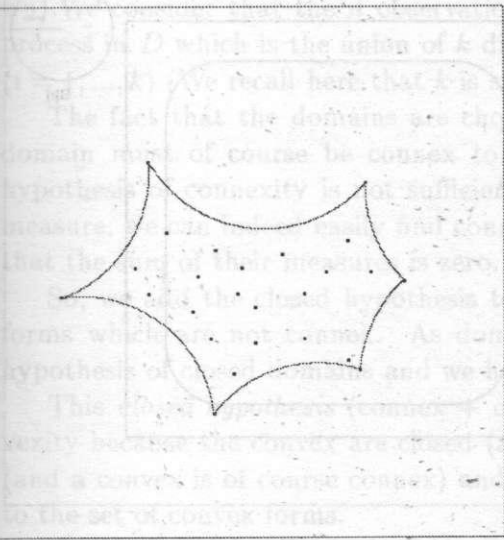
$$X^B = \left( \bigcup_u \{B_u, B_u \subset X^c\} \right)^c.$$

So, the closing of a set  $X$  by a set  $B$  is the complement of the set of all points of  $X^c$  covered by the translates of  $B$  that are inside  $X^c$ .

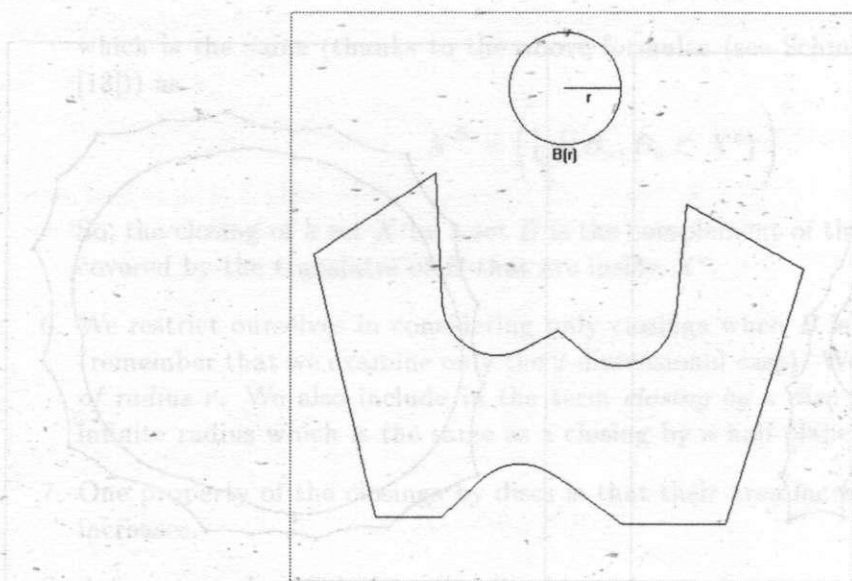
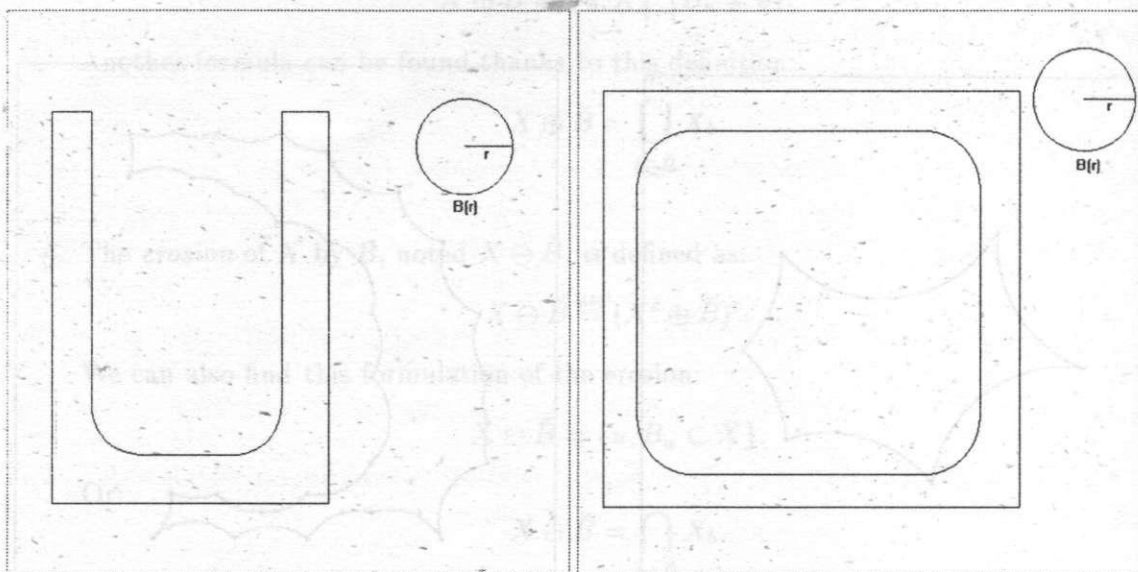
6. We restrict ourselves in considering only closings when  $B$  is a DISC of radius  $r > 0$  (remember that we examine only the 2-dimensional case). We will talk about *closing of radius  $r$* . We also include in the term *closing by a disc* the case of a closing of infinite radius which is the same as a closing by a half-plane or convex hull.
7. One property of the closings by discs is that their area increases as the radius of  $B$  increases.
8. A few examples of closings (by discs) are given :
  - First, when  $X$  is a set of points (see figure 1 to figure 4).
  - And then, when  $X$  is a compact connex domain (see figure 5 to figure 7).
9. A compact which is the same as its closing by a disc of some radius  $r$  is called *closed*.

Let us now use the last definition in cluster analysis. The statistical method proposed herein is the same as in the Hypervolume method.

We still suppose that we observe  $n$  data points  $\{x_1, \dots, x_n\}$  inside  $D \subset \mathbb{R}^2$  unknown



Figures 1-4: Connex closings of different sets of points



Figures 5-7: Closings of different compact connex domains



Let us now use the last definition in cluster analysis: The statistical method proposed here is the same as in the Hypervolume method.

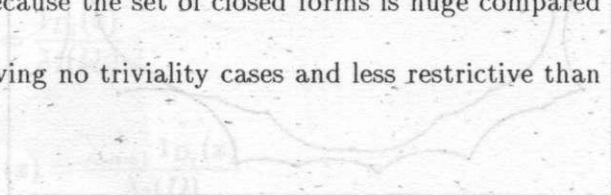
We still suppose that we observe  $n$  data points  $\{x_1, \dots, x_n\}$  inside  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  ( $D$  unknown). We consider that the  $n$  observations are a realization of a stationary Poisson point process in  $D$  which is the union of  $k$  disjoint CONNEX CLOSED compact domains  $D_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) (We recall here that  $k$  is still fixed beforehand).

The fact that the domains are chosen to be *connex and closed* can be explained: a domain must of course be connex to be considered as only one piece. However, the hypothesis of connexity is not sufficient: if we search for domains of minimal Lebesgue measure, we can indeed easily find connex domains which contain all the points and such that the sum of their measures is zero. Trivial cases like this must of course be avoided.

So, we add the closed hypothesis to the connex hypothesis. There are indeed closed forms which are not connex. As domains must be connex, we can not take only the hypothesis of closed domains and we have to ask domains to be *connex and closed*.

This *closed hypothesis* (connex + closed domains) generalizes the hypothesis of convexity because the convex are closed (a convex is equal to each of its closings - (by discs)) (and a convex is of course connex) and because the set of closed forms is huge compared to the set of convex forms.

We have got therefore a hypothesis giving no triviality cases and less restrictive than the convexity.



**Statistical solution**

We want to estimate the  $k$  subsets  $D_1, \dots, D_k$ .

The Likelihood function takes the form:

$$f_D((x_1, \dots, x_n)) = \prod_{i=1}^n \frac{1_D(x_i)}{\lambda_2(D)} = \frac{1}{(\lambda_2(D))^n} \prod_{i=1}^n 1_D(x_i)$$

where

- $1_D(x_i)$  is the indicator function of the set  $D$  at the point  $x_i$ .
- $\lambda_2(D) = \sum_{i=1}^k \lambda_2(D_i)$  is the 2-dimensional Lebesgue measure of  $D$ .

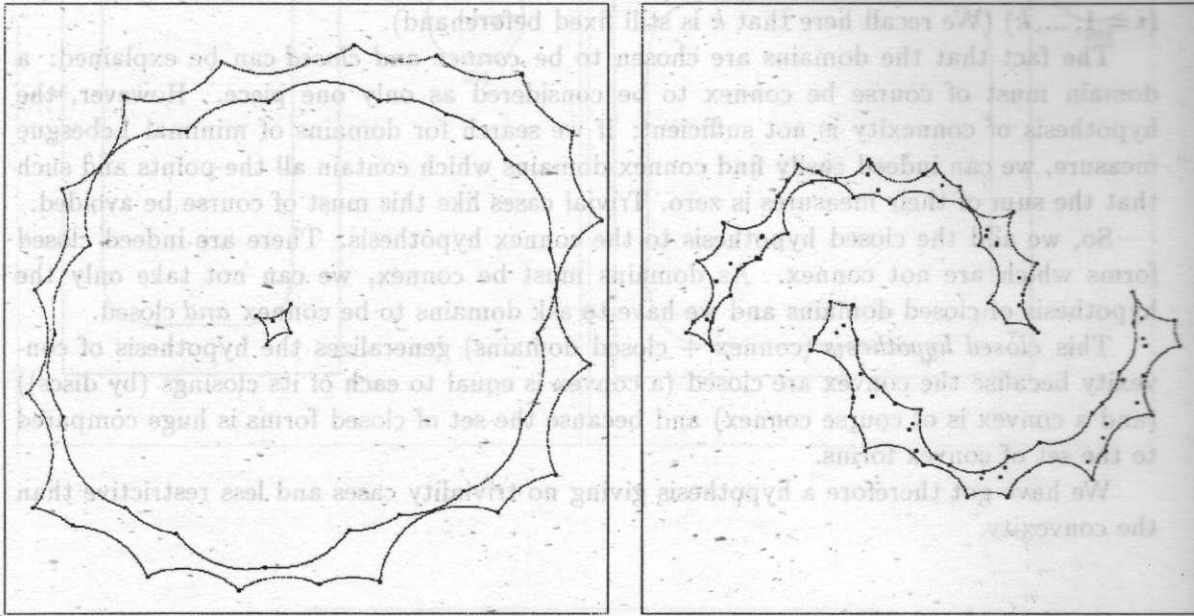
So, the domain  $D$  for which the likelihood is maximal is, among all those which contain all the points, the one whose Lebesgue measure is minimal.

Let us define the *optimal closing of a set of points* as the connex closing (by a disc) whose Lebesgue measure is minimal, which is also, thanks to the remark (2.2.7), the connex closing (by a disc) whose radius is minimal.

By our closed hypothesis, for each partition of the set of points into  $k$  subdomains having DISJOINT closings, the likelihood has a local maximum attained with the optimal closings of the  $k$  subsets.

The global maximum will then be attained with the partition for which the sum of the Lebesgue measures of the optimal closings of the  $k$  subgroups is minimal. This is the solution we seek.

We can see 2 examples of optimal partitions in figure 8 and figure 9, showing the ability of the method to find non convex natural clusters.



Figures 8-9: Two examples of optimal partitions (partitions which minimize the sum of the area of the disjoint optimal closings of the points in the  $k$  clusters), with  $k = 2$

Unfortunately, we deal with a combinatorial problem and the number of partitions of  $n$  objects into  $k$  non empty groups requires  $S(n, k)$  operations where

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n$$

is the number of Stirling of order 2 (See Späth (1980) [15]). For example, with  $k = 2$ ,  $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$ .

So, when the number  $n$  of objects and the number of classes increase, an algorithm seeking the best partition among all of these would consume large amounts of computer time and would be unsuitable for use.

### 3 Corresponding discriminant rules

We will now expose the discriminant rule associated with the procedure we found. First, we recall the discriminant rule associated with the model of Hardy and Rasson (1982)

based on the hypothesis of convexity. We still examine only the 2-dimensional case.

### 3.1 Based on the convexity

The details of the discriminant rule exposed here can be found in Beaufays and Rasson (1985) [1].

Let us consider the model proposed and used in cluster analysis by Hardy and Rasson (1982) [8].

So, we suppose that the  $n$  observations  $\{x_1, \dots, x_{n_1}, x_{n_1+1}, \dots, x_{n_1+n_2}, \dots, x_{n_1+\dots+n_{k-1}+1}, \dots, x_{n_1+\dots+n_{k-1}+n_k}\}$  in the training sets are a realization of a *stationary Poisson point process* in a domain  $D$  of  $\mathbb{R}^2$  which is the union of  $k$  disjoint CONVEX compact subdomains  $D_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ). We want to assign an individual  $x$  to one of the  $k$  populations  $D_i$ .

The conditional distribution of the  $i^{th}$  population is assumed to be uniform in the convex domain  $D_i$ , and the a priori probability  $p_i$  that an individual belongs to population  $i$  is proportional to the Lebesgue measure of  $D_i$ .

The density of population  $i$ ,  $f_i(x)$ , and the unconditional density,  $f(x)$ , are respectively equal to:

$$f_i(x) = \frac{1_{D_i}(x)}{\lambda_2(D_i)}$$

and

$$f(x) = \sum_{i=1}^k p_i f_i(x) = \frac{\sum_{i=1}^k 1_{D_i}(x)}{\lambda_2(D)}$$

The decision rule is the one given by the Bayesian rule, with the unknown parameters of the convex sets  $D_i$  replaced by their maximum likelihood estimations.

Let  $X_i$  be the labelled sample of population  $i$ ,  $H(X_i)$  be its convex hull and  $x$  be the individual to be assigned to one of the  $k$  populations.

If  $x$  is allocated to the  $i^{th}$  group, the maximum likelihood estimates of the domains  $D_j$  are, thanks to our hypothesis of convexity:

$$\hat{D}_j = \begin{cases} H(X_j) & \text{if } j \neq i \\ H(X_j \cup \{x\}) & \text{if } j = i \end{cases}$$

The maximum likelihood estimate of  $p_i f_i(x)$  is therefore:

$$\widehat{p_i f_i(x)} = \frac{1_{\hat{D}_i}(x)}{\sum_{j=1}^k \lambda_2(H(X_j)) + S_i(x)}$$

where  $S_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_2(H(X_i \cup \{x\})) - \lambda_2(H(X_i))$ .

As the convex sets are assumed disjoint,  $x$  can not be allocated to the  $i^{th}$  group, unless  $H(X_i \cup \{x\})$  and  $(H(X_j))$  are disjoint for all  $j \neq i$ . Otherwise, Beaufays and Rasson define arbitrarily  $S_i(x) = +\infty$ .

The allocation rule is :

Assign  $x$  to the  $i^{\text{th}}$  population if and only if  $\widehat{p_i f_i}(x) > \widehat{p_j f_j}(x) \quad \forall j \neq i$ , which comes to:

Assign  $x$  to the  $i^{\text{th}}$  population if and only if  $S_i(x) < S_j(x), \forall j \neq i$

namely:

Assign  $x$  to the  $i^{\text{th}}$  population if and only if the difference between the area of the convex hulls of the labeled sample of the  $i^{\text{th}}$  population with and without the individual to be assigned is minimal.

We can see in figure 10 an example of the areas concerned in this allocation rule.

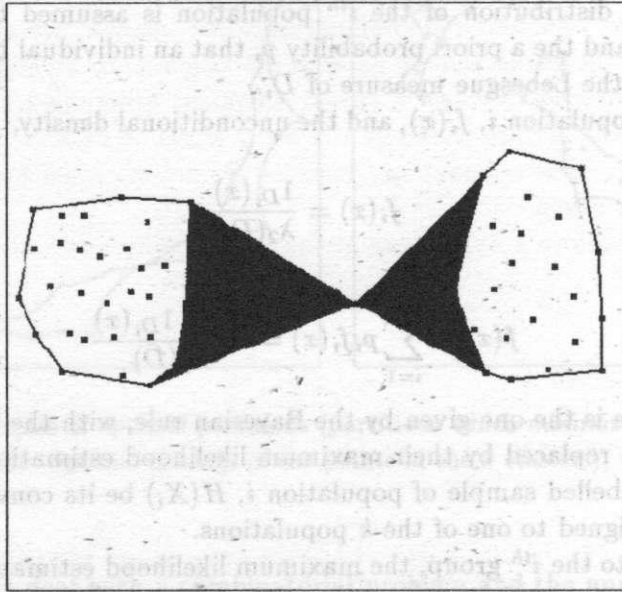


Figure 10: Illustration of the difference between the areas of convex hulls used in the allocation rule based on the convexity

### 3.2 Based on the closings

We now base our discriminant rule on the closed model (see 2.2).

So, we suppose that the  $n$  observations  $\{x_1, \dots, x_{n_1}, x_{n_1+1}, \dots, x_{n_1+n_2}, \dots, x_{n_1+\dots+n_{k-1}+1}, \dots, x_{n_1+\dots+n_{k-1}+n_k}\}$  in the training sets are a realization of a *stationary Poisson point process* in a domain  $D$  of  $\mathbb{R}^2$  which is the union of  $k$  disjoint CLOSED AND CONNEX compact subdomains  $D_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ). We want to assign an individual  $x$  to one of the  $k$  populations  $D_i$ .

We follow here the same idea as the one exposed before: we judge the hypothesis of convexity too strong. So, we examine the case of closed and connex domains. We will reproduce here the same argument as in the convex case.

The conditional distribution of the  $i^{th}$  population is assumed to be uniform in the closed and connex domain  $D_i$ , and the a priori probability  $p_i$  that an individual belongs to population  $i$  is proportional to the Lebesgue measure of  $D_i$ .

The density of population  $i$ ,  $f_i(x)$ , and the unconditional density,  $f(x)$ , are the same as before:

$$f_i(x) = \frac{1_{D_i}(x)}{\lambda_2(D_i)}$$

and

$$f(x) = \sum_{i=1}^k p_i f_i(x) = \frac{\sum_{i=1}^k 1_{D_i}(x)}{\lambda_2(D)}$$

The decision rule is still the one given by the Bayesian rule, with the unknown parameters -the convex sets  $D_i$ - replaced by their maximum likelihood estimations.

Let  $X_i$  be the labelled sample of population  $i$ ,  $F(X_i)$  its *optimal closing* and  $x$  the individual to be assigned to one of the  $k$  populations.

If  $x$  is allocated to the  $i^{th}$  group, the maximum likelihood estimates of the domains  $D_j$  are, thanks to our closed hypothesis:

$$\hat{D}_j = \begin{cases} F(X_j) & \text{if } j \neq i \\ F(X_j \cup \{x\}) & \text{if } j = i \end{cases}$$

The maximum likelihood estimate of  $p_i f_i(x)$  is therefore:

$$\widehat{p_i f_i}(x) = \frac{1_{\hat{D}_i}(x)}{\sum_{j=1}^k \lambda_2(F(X_j)) + S_i(x)}$$

where  $S_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_2(F(X_i \cup \{x\})) - \lambda_2(F(X_i))$ .

As the closed and connex sets are assumed disjoint,  $x$  can not be allocated to the  $i^{th}$  group, unless  $F(X_i \cup \{x\})$  and  $(F(X_j))$  are disjoint for all  $j \neq i$ . Otherwise, we define  $S_i(x) = +\infty$ .

The allocation rule is :

Assign  $x$  to the  $i^{th}$  population if and only if  $\widehat{p_i f_i}(x) > \widehat{p_j f_j}(x) \quad \forall j \neq i$ , which comes to:

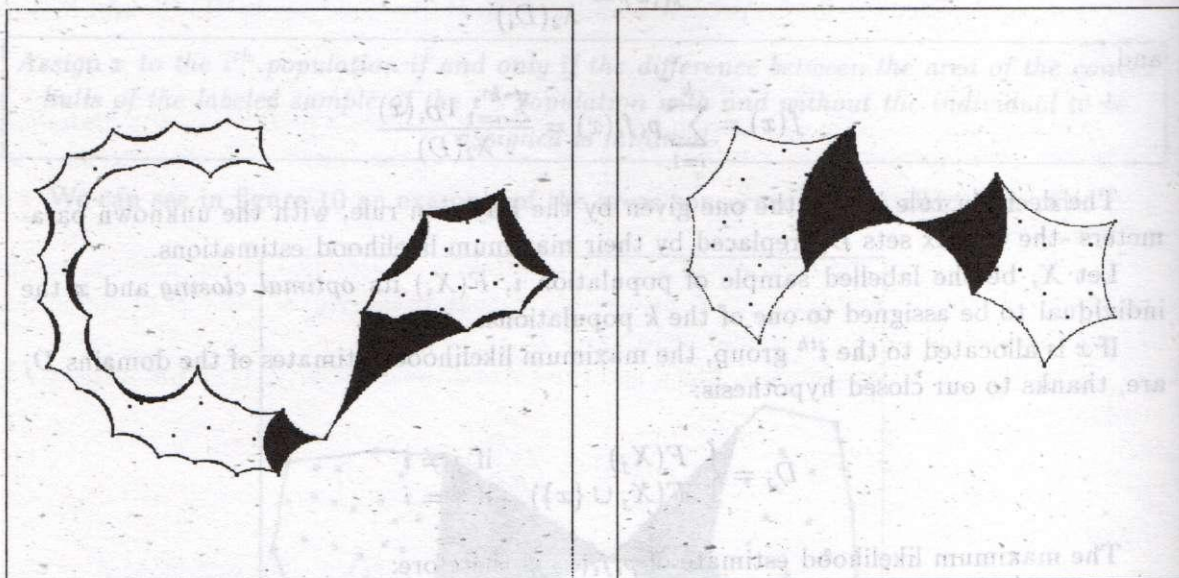
Assign  $x$  to the  $i^{th}$  population if and only if  $S_i(x) < S_j(x), \forall j \neq i$

namely:

Assign  $x$  to the  $i^{th}$  population if and only if the difference between the area of the OPTIMAL CLOSINGS of the labeled sample of the  $i^{th}$  population with and without the individual to be assigned is minimal.

There are different possible cases about this allocation rule.

The optimal closings of the  $i^{\text{th}}$  population with and without the individual to be assigned can have the same radius. But of course, the case of different radius is also possible. Figure 11 illustrates the difference of closings of same radius, and figure 12 illustrates the case of closings of different radius.



Figures 11-12: Illustration of the difference between the areas of optimal closings used in the allocation rule based on the closings, first when the optimal closings have the same radius and then, when they have different radius.

#### 4 Admissibility of our procedure

The problem of choosing a clustering procedure among the myriad proposed is perplexing.

The approach proposed here is the suggestion made by L. Fisher and J.W. Van Ness (1971) [6].

They formulated 9 properties "which any reasonable procedure should satisfy" and called a procedure satisfying them *admissible*. Their goal was to eliminate bad clustering algorithms.

As our procedure is based on Lebesgue measure and not on a distance, the problems will arise when the notion of distance is used in admissibility conditions. So, we will divide the 9 conditions into 3 groups.

We will recall the definition of each of the 9 conditions.

##### 4.1 Conditions directly applicable to $\mathbb{R}^d$

1. A procedure is said to be *point proportion admissible* if after we duplicate one or more points any number of times and reapply the procedure, the boundaries of the

clusters are not changed.

Of course, this condition will be trivially fulfilled by our procedure, just in looking to its definition.

2. A procedure is said to be *cluster proportion admissible* if after we duplicate each cluster an arbitrary number of times (i.e. each point within the same cluster is duplicated the same number of times), the boundaries of the clusters are not changed.

Once again, the condition is trivially fulfilled by our procedure.

3. If a clustering procedure results in  $k$  clusters  $\{X_1, \dots, X_k\}$ , and all points in any one of these clusters, say  $X_j$ , are removed, the procedure is said to be *cluster omission admissible* if, when applied to the remaining points to get  $k - 1$  clusters, it gives the original clusters except for  $X_j$ .

Our procedure is cluster omission admissible. The proof is quite easy and is given here:

Suppose we find  $k$  clusters. They correspond to the partition  $\{X_1, \dots, X_k\}$  in  $k$  clusters that minimizes the sum of the area of the disjoint optimal closings of the points in the  $k$  clusters.

So, let us remove one cluster, say  $X_j$ , and apply the procedure to the remaining points. Suppose we do not find the clusters  $\{X_i, i = 1, \dots, k, i \neq j\}$ , but a better (in the sense of our procedure) partition in  $k - 1$  clusters, say  $\{X'_1, \dots, X'_{k-1}\}$ . Then, the partition in  $k$  clusters  $\{X'_1, \dots, X'_{k-1}, X_j\}$  would be better (in the sense of our procedure) than  $\{X_1, \dots, X_k\}$ , which is impossible because the last partition is by definition the one which minimizes the sum of the area of the disjoint optimal closings of the points in the  $k$  clusters.

So, our procedure must find the clusters  $\{X_i, i = 1, \dots, k, i \neq j\}$  after removing  $X_j$  and is then cluster omission admissible.

4. A procedure is said to be *convex admissible* if the convex hulls of the  $k$  clusters produced are pairwise disjoint.

Fisher and Van Ness said that this admissibility condition arose from the feeling that "one cluster should not *cut through another*" but they also said that "convex admissibility does not seem very universal since it eliminates many reasonable clusterings".

Our procedure is not convex admissible. There is nothing surprising in it, since our feeling was that convexity was a too strong hypothesis and our aim was precisely to be able to find non convex natural clusters.

For example, for the set of data in figure 13, if we examine all the partitions of the points in  $k$  clusters, the partition we seek will be, for our procedure, the 2 non convex natural clusters drawn in the figure 13 and then our procedure will not be convex admissible. We can of course easily see that in cases like this, convex admissibility is not desirable.

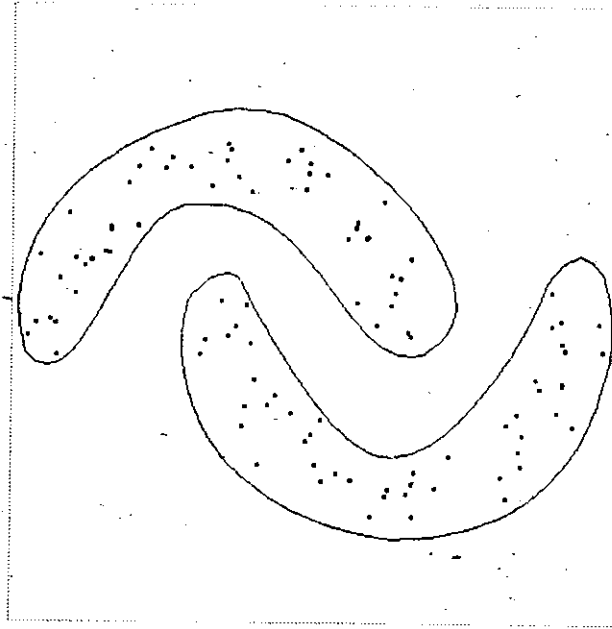


Figure 13: One of the cases where convex admissibility is not advisable

## 4.2 Conditions directly applicable to $\mathbb{R}$ and generalizable to $\mathbb{R}^d$

Among the 9 admissibility conditions of Fisher and Van Ness, 3 were expressed in terms of distance.

We have to say that if the basic space is  $\mathbb{R}$ , our procedure is the same as the hypervolume method, which looks for the  $k$  disjoint intervals containing all the points such that the sum of their lengths is minimal. This is due to the fact that the Lebesgue measure in one dimension is the length and that in  $\mathbb{R}$ , so, with points aligned, the only connex closing defined is the closing of infinite radius, namely the convex hull. The optimal closing in  $\mathbb{R}$  becomes then the convex hull.

So, we can easily see that in  $\mathbb{R}$ , the 3 following conditions will be fulfilled. More details about it are given in Rasson, Hardy, Szary and Schindler (1982) [12], where they prove it for the hypervolume method.

1. Suppose the  $n$  points  $\{x_1, \dots, x_n\}$  are ordered so that the resulting clusters are of the form:

$$X_1 = \{x_1, \dots, x_{n_1}\}, X_2 = \{x_{n_1+1}, \dots, x_{n_2}\}, \dots, X_k = \{x_{n_1+n_2+\dots+n_{k-1}+1}, \dots, x_n\}$$



Let  $y_1, \dots, y_n$  be any re-ordering of the points and define

$$X'_1 = \{y_1, \dots, y_{n_1}\}, X'_2 = \{y_{n_1+1}, \dots, y_{n_2}\}, \dots, X'_k = \{y_{n_1+n_2+\dots+n_{k-1}+1}, \dots, y_n\}$$

We call  $X'_1, \dots, X'_k$  an image of  $X_1, \dots, X_k$ .

A clustering  $X_1, \dots, X_k$  is said to be *image admissible* if it does not have an image which is uniformly better in the sense that

- (a)  $d(x_i, x_j) \geq d(y_i, y_j)$  when the  $i^{th}$  and the  $j^{th}$  points are in the same cluster, and
- (b)  $d(x_i, x_j) \leq d(y_i, y_j)$  when the  $i^{th}$  and the  $j^{th}$  points are in different clusters, with strict inequality holding for at least one pair of indices.

2. Data are *well-structured* in  $k$  groups if there is a clustering  $X_1, \dots, X_k$  such that all within-cluster distances are smaller than all between-cluster distances.

A procedure is said to be *k-groups admissible* if, when the data are well-structured in  $k$  groups, it gives the clustering  $X_1, \dots, X_k$  when it partitions the original data into  $k$  clusters.

The well-structured condition can be generalized to  $\mathbb{R}^d$  in the following way: there is a clustering such that all the triangles constituted by three points belonging to the same cluster have smaller areas than those constituted by three points belonging to at least two different clusters.

3. A procedure is said to be *monotone admissible* if a monotone transformation applied to each element of the distance matrix does not change the resulting clustering.

Our procedure fulfills the condition on the real line. On the other hand, on  $\mathbb{R}^d$ , the only monotone transformations compatible with the configurations are the homotheties for which our procedure are invariant.

### 4.3 Inapplicable conditions

The last condition (well-structured exact tree admissibility) is only applicable to hierarchical methods and thus cannot be fulfilled by our procedure.

### 4.4 Additional condition

Van Ness (1973) [17] added admissibility conditions to the precedent ones. Among them, we will point out one.

This condition is only applicable to clustering procedures with corresponding discriminant analysis procedures.

Suppose a procedure gives the clustering  $\{X_1, \dots, X_k\}$  and an arbitrary point  $y$  is removed from  $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$ , say  $y \in X_j$ .

We now use  $X_1, \dots, X_{j-1}, X_j/\{y\}, X_{j+1}, \dots, X_k$  as training set for the corresponding discriminant analysis procedure.

If the point  $y$  is always put back to its original cluster  $X_j$ , the procedure is said to be *repeatable admissible*.

Our procedure is repeatable admissible. We will prove it here.

Suppose we find  $k$  clusters. They correspond to the partition  $\{X_1, \dots, X_k\}$  in  $k$  clusters that minimizes the sum of the area of the disjoint optimal closings of the points in the  $k$  clusters.

So, let us remove one arbitrary point  $y$  from  $X_j$ . Suppose then that after using  $X_1, \dots, X_{j-1}, X_j/\{y\}, X_{j+1}, \dots, X_k$  as training set for the corresponding discriminant analysis procedure (see 3.2),  $y$  is assigned to the cluster  $X_l, l \neq j$ . That means that the difference between the area of the optimal closings of the  $l^{\text{th}}$  cluster with and without  $y$  is less than the same difference for the cluster  $j$ .

If we now consider the partition of the  $n$  points  $X_1, \dots, X_{j-1}, X_j/\{y\}, X_{j+1}, \dots, X_{l-1}, X_l \cup \{y\}, X_{l+1}, \dots, X_k$  with (without loss of generality)  $j < l$ , the sum of the areas of the optimal closings of these  $k$  clusters is less than the sum of the areas of the optimal closings of  $\{X_1, \dots, X_k\}$ .

This is impossible because  $\{X_1, \dots, X_k\}$  is the solution of our clustering method and so, by definition, represents the partition with the minimal sum of the areas of the optimal closings of the clusters.

So,  $y$  must be assigned to  $X_j$  and our procedure is then repeatable admissible.

## Conclusion

Using closings in both clustering analysis and discriminant analysis seems to be very interesting. Indeed, as the closed and connex hypothesis generalizes the convex hypothesis, we were able to create a clustering method and a discriminant analysis method generalizing the Hypervolume method and the corresponding discriminant rule. So, our aim to change the convexity in a less restrictive hypothesis was attained.

Moreover, a lot of Fisher and Van Ness admissibility conditions were fulfilled by our procedure, which cannot then be considered as a bad clustering algorithm.

Unfortunately, for the clustering method created, an algorithm seeking the best partition among all of these will not be suitable. So, researchs have to be made -and are made- to avoid the consideration of each different partition.

As the domain of use of closed forms in clustering is quite unexplored, a lot of research domains are being examined.

For example, the use of alpha-shapes in clustering instead of closings.

Improvements of the method can also be made, such as the generalization to  $d$  dimensions, or the use of closings by squares or any convex instead of discs.

## References

- [1] Beaufays, P.; Rasson, J.-P. (1985) "A new geometric discriminant rule", *Computational Statistics Quarterly* 2, Elsevier Science B.V.: 15-30.

- [2] Bock, H. H. (1997) "Probability models for convex clusters", in *Classification and Knowledge Organization, Proceedings of the 20th Annual Conference of the Gesellschaft für Klassifikation e.V., University of Freiburg, March 6-8, 1996*, Klar-Opitz editors, Springer.
- [3] Chandon, J.L.; Pinson, S. (1980) *Analyse Typologique - Théorie et Applications*. Masson, Paris.
- [4] Cressie, N.A.C. (1991) *Statistics for Spatial data*. John Wiley & Sons, New York.
- [5] Everitt, B.S. (1980) *Cluster Analysis, second edition*. John Wiley & Sons, New York.
- [6] Fisher, L.; Van Ness, J.W. (1971) "Admissible clustering procedures", *Biometrika* **58**: 91-104.
- [7] Fisher, L. (1972) "A survey of the mathematical theory of multidimensional processes", *Stochastic Point Processes*, Peter A.W, Lewis (ed.), John Wiley & Sons, London.
- [8] Hardy, A.; Rasson, J.-P. (1982) "Une nouvelle approche des problèmes de classification automatique", *Statistiques et Analyse des Données* **7**: 41-56.
- [9] Karr, A.F. (1991) *Point Processes and their Statistical Inference*. Marcel Dekker, New-York.
- [10] Krickeberg, K. (1982) "Processus ponctuels en statistique", in *Ecole d'Été de Probabilités de Saint-Flour X-1980*, 205-313, Springer-Verlag, Berlin.
- [11] Matheron, G. (1975) *Random Sets and Integral Geometry*. John Wiley & Sons, New-York.
- [12] Rasson, J.-P.; Hardy, A.; Szary, L.; Schindler, P. (1982) "An optimal clustering method based on the Rasson's criterion and resulting from a new approach", *Pattern Recognition Theory and Applications*, Kitter, Fu & Pau (eds.): 63-71.
- [13] Schmitt, M.; Mattioli, J. (1993) *Morphologie Mathématique*. Logiques Mathématiques Informatiques, Masson, Paris.
- [14] Serra, J.P. (1982) *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, London.
- [15] Späth, H. (1980) *Cluster Analysis Algorithms for Data Reduction and Classification of Objects*. Ellis Horwood Limited, Chichester.
- [16] Stoyan, D.; Stoyan, H. (1994) *Fractals, Random Shapes and Point Fields, Methods of Geometrical Statistics*. John Wiley & Sons, Chichester.
- [17] Van Ness, J.W. (1973) "Admissible clustering procedures", *Biometrika* **60**: 422-424.

## DISTANCIAS CON TRES VÍAS

SERGE JOLY \* - NOMBRE GEORGES LE CALVÉ\*

### Resumen

Nos interesamos en las relaciones de disimilitud que se definen sobre tripletes, en lugar de sobre parejas; los tres conjuntos de items con papeles análogos (excluyendo entonces el caso tradicional de tablas  $I \times J$  indexadas por un tercer índice  $K$ , el tiempo por ejemplo). Damos una definición de distancias con tres vías análoga a la distancia con dos vías. Mostramos que es posible generalizar, de manera inmediata, nociones tales como las de ultramétricas, distancias con centro o euclídeas. El caso importante del modelo del semiperímetro es especialmente estudiado.

Un ejemplo real es tratado.

**Palabras clave:** índices de disimilitud, datos con tres vías, espacios métricos, clasificación.

### Introducción

El análisis de datos con tres vías es generalmente considerado como una extensión de los métodos de dos vías, en el sentido en que se considera en general  $k$  tablas con 2 vías  $X_{I \times J}$ . En el caso en que ningún conjunto se impone como estructurante de los demás, los métodos que hacen jugar roles simétricos a  $I, J, K$  son poco numerosos.

Las herramientas de base de tales análisis son las nociones de similitud y disimilitud, ligadas a las nociones matemáticas de producto escalar y de distancias. El álgebra matricial y los espacios vectoriales proveen herramientas bien adaptadas.

Parece natural entonces definir estas nociones de producto escalar y de distancia con tripletes (incluso  $N$ -tuplas). Ahora bien, aún si la generalización de la noción de producto escalar, definida como aplicación trilineal, es casi inmediata, conduce a dificultades casi insalvables debido a la complejidad teórica del producto tensorial de orden 3 (cf. Franc (1988), Denis & Dhorne (1988)). En cambio, la noción de distancia se generaliza muy fácilmente y parece muy útil.

La primera sección está dedicada a la definición y a ejemplos; sus propiedades son estudiadas en la sección 2. La sección 3 examina algunos problemas de representación. La sección 4 estudia casos particulares y una aplicación es desarrollada en la sección 5.

\*Laboratoire d'Analyse des Données, Université de Rennes II, 6 Avenue Gaston Berger, 35043 Rennes Cedex, Francia

## 1 Distancias con tres vías

**Definición 1** Sea  $I$  un conjunto de ítems y  $T$  una aplicación de  $I^3$  en  $\mathbb{R}^+$ . Entonces  $T$  es una distancia con tres vías (DTV) si

- (i)  $t_{ijk}$  es un invariante por permutación sobre los índices  $i, j, k$ .
- (ii)  $t_{iii} = 0$
- (iii)  $t_{iik} = t_{ikk}$
- (iv)  $t_{ijk} \geq t_{iik}$
- (v)  $t_{ijk} + t_{ijl} \geq \max(t_{ikl}, t_{jkl})$ .

Se puede ver que (i) es una generalización de la noción de simetría, mientras que (v) la noción de desigualdad triangular.

### Ejemplos

- DTV de medio perímetro

Sea  $(I, D)$  un espacio métrico. Se pone

$$t_{ijk} = \frac{1}{2}(d_{ij} + d_{jk} + d_{ik})$$

- DTV con centro

Sea  $X$  una aplicación de  $I$  en  $\mathbb{R}^+$ . Se define

$$\begin{cases} t_{ijk} = x_i + x_j + x_k \\ t_{iik} = x_i + x_k \\ t_{iii} = 0 \end{cases}$$

- DTV del tipo inercia

Sea  $(I, D)$  un espacio métrico. Se pone

$$t_{ijk}^2 = d_{ij}^2 + d_{jk}^2 + d_{ik}^2$$

- DTV ultramétrica

Una DTV se dice *ultramétrica* si verifica

$$t_{ijk} \geq \max(t_{ijj}, t_{iik}, t_{jjk})$$

$$t_{iij} \geq \max(t_{iik}, t_{jjk})$$

Nótese que esta definición es más exigente que la siguiente (la cual es una consecuencia) y que parece más natural:

$$t_{ijk} \leq \max(t_{ijl}, t_{jkl}, t_{ilk})$$

nicamente la definición dada asegura la representación de una DTV por un árbol jerárquico.

## 2 Propiedades

**Teorema 1** Sea  $T$  una DTV y definimos su restricción  $u_{ij}$  por

$$u_{ij} := t_{ijj} - t_{iij}.$$

Entonces  $u$  es una distancia.

Se notará que la restricción de una DTV de medio perímetro o de tipo inercia es la distancia implicada por el modelo, que la restricción de una DTV con centro es una distancia con centro, de una DTV ultramétrica es una ultramétrica.

**Teorema 2** Sea  $T$  una DTV. Entonces

1.  $t_{ijk}$  es una DTV de medio perímetro ssi

$$t_{ijk} = t_{ij.} + t_{i.k} + t_{.jk} - (t_{i..} + t_{.j.} + t_{..k}) + t_{...}$$

2. la solución de  $2t_{ijk} = d_{ij} + d_{jk} + d_{ki}$  está dada por

$$d_{ij} = 2t_{ij.} - (t_{i..} + t_{.j.}) + \frac{2}{3}t_{...}$$

3.  $d_{ij}$  definida como antes es una distancia ssi  $t_{ijk}$  es una DTV.

**Teorema 3** Sea  $T$  una DTV.  $T$  es de tipo inercia ssi

$$t_{ijk}^2 = t_{.jk}^2 + t_{i.k}^2 + t_{ij.}^2 - (t_{i..}^2 + t_{.j.}^2 + t_{..k}^2) + t_{...}^2$$

Es más, la distancia  $d_{ij}$  que interviene en el modelo es euclídea ssi la matriz  $W$  definida por

$$w_{ij} = -t_{ij.}^2 + t_{i..}^2 + t_{.j.}^2 - t_{...}^2$$

es semi definida positiva.

## 3 Representaciones

Nos interesamos en el problema siguiente: dada  $T$  una DTV sobre un conjunto  $I$ , encontrar un representación fácilmente legible de las cantidades  $t_{ijk}$ . Examinamos varias representaciones posibles.

### Representación euclídea

En esta representación la figura es una figura euclídea provista de la distancia usual  $D$ , ligada a  $T$  por  $t_{ijk} = d_{ij} + d_{jk} + d_{ki}$ . El teorema 3 nos provee el valor de  $d_{ij}$  y la construcción de su representación euclídea realizada por las técnicas habituales de Análisis de Proximidades (*MultiDimensional Scaling*).

### 3.1 Árbol jerárquico

La definición retenida para una DTV ultramétrica asegura la posibilidad de su representación por un árbol jerárquico en el cual la distancia  $t_{ijk}$  es el nivel para el cual los items  $i, j, k$  se reúnen por la primera vez.

Los algoritmos clásicos se generalizan fácilmente: agregación del triplete correspondiente a la menor distancia, y nuevo cálculo de las distancias (agregaciones) poniendo en juego uno o varios elementos del triplete anterior (por ejemplo, salto mínimo, salto máximo o salto promedio).

### 3.2 Árbol de longitud mínima

El algoritmo de Prim, en el caso de las distancias clásicas, reposa sobre una idea simple: ligar por una arista la pareja que corresponde el mínimo de  $d_{ij}$ , y luego buscar la pareja mínima siguiente tal que uno de los puntos ha sido tomado.

La generalización de las DTV es inmediata reemplazando la noción de pareja por la de triplete y la de apres por la de lado. El algoritmo se convierte entonces en: escoger el triplete  $i, j, k$  correspondiente al mínimo de  $t_{ijk}$ , y construir un triángulo correspondiente. Buscar enseguida el triplete mínimo que tiene un lado con el anterior.

## 4 Casos particulares

### 4.1 Tablas de incidencia con tres vías

En varios casos los datos son dados bajo la forma de una tabla  $X_{IJK}$  de tipo de incidencia o similitud. Tendiendo en cuenta la dificultad teórica de tales nociones para el caso de 3 vías, parece razonable transformarla en una disimilitud con tres vías por una función decreciente. Existe un gran número (Le Calvé (1988)). Entre ellas una transformación del tipo  $t_{ijk} = C - X_{ijk}$  parece adaptada a situaciones del tipo ultramétrica, árboles aditivos, distancias con centro, city-block.

### 4.2 Tablas rectangulares

También puede suceder que los datos sean conocidos no sobre  $I^3$  sino sobre  $I \times J \times K$ , donde  $I, J, K$  son 3 conjuntos distintos. Este caso, muy frecuente, generaliza el caso conocido bajo el nombre de *unfolding* (Coombs (1964), Furnas (1980)). No plantea ningún problema particular para la construcción de jerarquías, como en el caso usual es necesario completar de manera "coherente" los datos para las representaciones euclídeas.

## 5 Aplicación

El ejemplo siguiente resulta de una experiencia psico-métrica sensorial. Consiste en pedir a una persona que asocie un color, un sabor y un sonido. El ejemplo de ítems es:

*Color* Blanco, Rojo, Verde, Negro  
*Sabor* Salado, Azucarado, Amargo, Ácido  
*Sonido* Silencio, Agudo, Estridente, Grave

La tabla 1 da las asociaciones propuestas por un panel de 17 estudiantes.

Tabla 1: Matriz de incidencia de tres vías

	Blanco	Rojo	Verde	Negro	Blanco	Rojo	Verde	Negro
Salado	10	0	8	1	1	5	2	1
Dulce	25	0	3	2	2	7	4	0
Amargo	5	1	2	-14	2	7	11	3
Ácido	1	0	1	2	1	11	6	3
	Silencio				Agudo			

	Blanco	Rojo	Verde	Negro	Blanco	Rojo	Verde	Negro
Salado	1	3	7	0	1	2	4	12
Dulce	2	2	1	0	6	8	3	6
Amargo	2	8	7	4	3	4	5	15
Ácido	4	12	12	2	0	3	1	2
	Estridente				Grave			

Este ejemplo, que, además, es de tipo "unfolding", no puede ser tratado de manera tradicional. Lo transformaremos en una DTV por  $t_{ijk} = 30 - n_{ijk}$ .

La figura 1 representa el árbol jerárquico obtenido por el salto mínimo, la figura 3 el árbol de longitud mínima, la figura 2 el primer plano principal de un análisis factorial sobre tabla de distancias.

Dejamos al lector el cuidado de interpretar los resultados.



Figura 1: Árbol jerárquico usando el salto mínimo

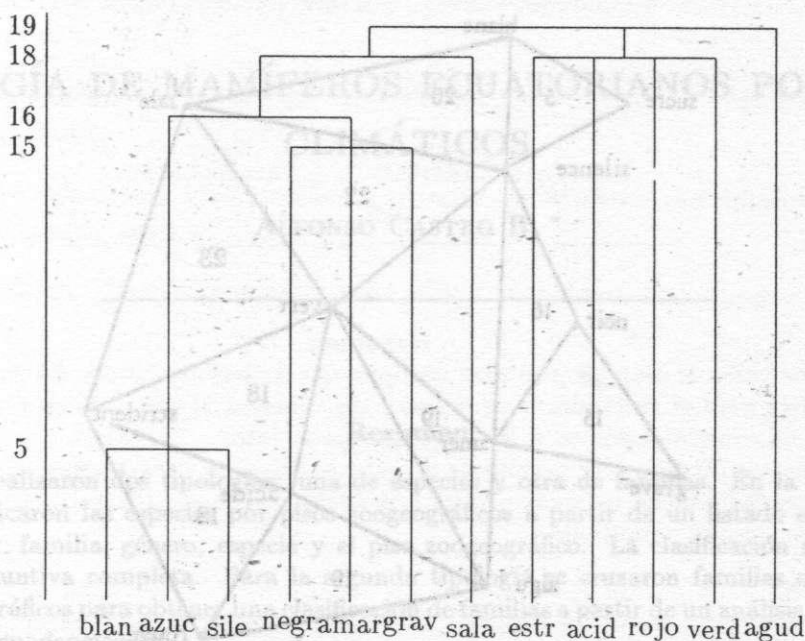


Figura 2: Primer plano principal de un análisis factorial sobre tabla de distancias

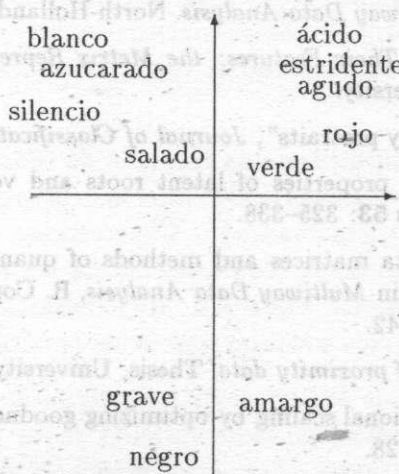
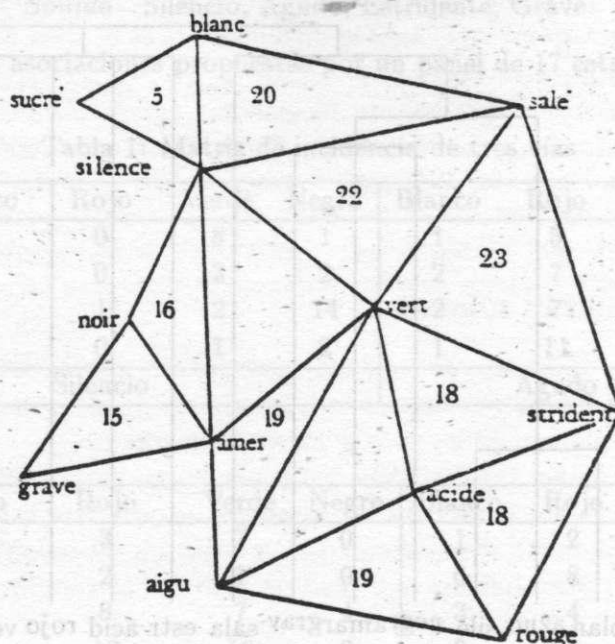


Figura 3: Árbol de longitud mínima



## Bibliografía

- [1] Coombs, I. (1964) *Theory of Data*. Wiley, New York.
- [2] Coppi, R.; Bolasco, S. (1989) *Multiway Data Analysis*. North-Holland, Amsterdam.
- [3] Furnas, G.W. (1980) *Objects and Their Features: the Matrix Representation of Two-Class Data*. Ph.D. Thesis, Stanford University.
- [4] Furnas, G.W. (1989). "Metric family portraits", *Journal of Classification* 6: 7-52.
- [5] Gower, G. (1966) "Some distance properties of latent roots and vector methods used un multivariable analysis", *Biometrika* 53: 325-338.
- [6] Hayashi, C. (1989) "Multiway data matrices and methods of quantification of qualitative data as strategy of data analysis", in *Multiway Data Analysis*, R. Coppi & S. Bolasco (eds.), North-Holland, Amsterdam: 131-142.
- [7] Heiser (1981) *Unfolding analysis of proximity data*. Thesis, University of Leiden.
- [8] Kruskal, J.B. (1964) "Multidimensional scaling by optimizing goodness of fit to a nonmetric hypothesis", *Psychometrika* 29: 1-28.
- [9] Le Calvé, G. (1985) "Distances à centre", *Statistique et Analyse des Données* 10(2): 29-44.
- [10] Le Calvé, G. (1988) "Similarity functions", *COMPSTAT 88*, D. Edwards & N.E. Raum (eds.), Physica Verlag, Heidelberg: 341-347.
- [11] Multiway 88 (1988) *International Meeting on the Analysis of Multiway Data Matrices*, Rome, March 28-30, 1988.
- [12] Torgerson, W.S. (1958) *Theory and Methods of Scaling*. Wiley, New York.

## TIPOLOGÍA DE MAMÍFEROS ECUATORIANOS POR PISOS CLIMÁTICOS

ALFONSO CASTRO B. \*

---

### Resumen

Se realizaron dos tipologías: una de especies y otra de familias. En la primera, se clasificaron las especies por pisos zoogeográficos a partir de un listado en el que constan: familia, género, especie y el piso zoogeográfico. La clasificación realizada fue disyuntiva completa. Para la segunda tipología se cruzaron familias con pisos zoogeográficos para obtener una clasificación de familias a partir de un análisis factorial de correspondencias.

---

\*Jefe del Departamento de Matemática y Estadística, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador

## ANÁLISIS FACTORIAL DESCRIPTIVO CON MATHEMATICA

WILLIAM CASTILLO \* – CARLOS ARCE\*

---

### Resumen

Este curso se propone presentar ejemplos que muestren el poder del paquete *Mathematica* para el tratamiento de datos y sus ventajas al utilizarlo en el trabajo de docencia e investigación en el área del análisis de datos.

Además ofrecer un conjunto de programas definidos para *Mathematica* sobre los métodos del análisis en componentes principales y el análisis factorial de correspondencias simples y múltiples.

### Temáticas

1. **Introducción a *Mathematica*** : Operaciones matriciales y solución del problema de regresión lineal múltiple. Introducción a la construcción de gráficos. Ajustes de curvas polinomiales y exponenciales.
2. **Análisis en Componentes Principales (ACP)**: Presentación geométrica del ACP y su implementación utilizando *Mathematica*. Construcción de los planos principales. Cálculo de cosenos cuadrados, de las contribuciones y porcentajes de inercia. Representación de información suplementaria. Ejemplos e interpretación de resultados.

---

\*CIMPA-PIMAD, Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, 2060 San José, Costa Rica

3. **Análisis Factorial de Correspondencias** (Estudio de la asociación entre dos variables cualitativas): Codificación de variables, cálculo de frecuencias, y construcción de tablas de contingencia. Test Chi-cuadrado. Construcción de las nubes de perfiles de las modalidades, representación bidimensional de los perfiles, calidad de las representaciones e índices de inercia explicada. Representación de modalidades de variables suplementarias. Ejemplos e interpretación de resultados.
4. **Análisis de Correspondencias Múltiples**: Codificación de variables y construcción de tablas de Burt. Representación bidimensional de los perfiles de las modalidades, calidad de las representaciones e índices de inercia explicada. Representación de variables suplementarias. Ejemplos e interpretación de resultados.

Los materiales del curso, así como los programas desarrollados y su documentación estarán a la disposición de los participantes para su reproducción.

## Referencias

- [1] Diday, E.; Lemaire, J.; Pouget, J.; Testu, F. (1982) *Éléments d'Analyse des Données*. Dunod, Paris.
- [2] Lebart, L.; Morineau, A.; Piron, M. (1995) *Statistique Exploratoire Multidimensionnelle*. Dunod, Paris.
- [3] Gray, J. (1994) *Mastering Mathematica: Programming Methods and Applications*. Academic Press, Massachusetts.
- [4] Wolfram, S. (1991) *The Mathematica Book*. University Press, Cambridge.

## ANÁLISIS EXPLORATORIO DEL CRECIMIENTO DE LA CAÑA DE AZÚCAR

WILLIAM CASTILLO \*– JORGE GONZÁLEZ\*

---

Se utiliza el método STATIS (dual) para analizar el crecimiento de una variedad (CP722086) de caña de azúcar, con base en mediciones mensuales realizadas durante un año, desde marzo de 1996 hasta enero de 1997, en muestreos de 30 plantas cada vez. Se tomaron mediciones de las siguientes variables: *Area Foliar Verde (AFV)*, *Altura de los tallos (Altura)*, *Peso Seco de las Hojas Verdes (PSHV)*, *Peso Seco de los Cogollos (PSCO)*, *Peso Seco de los Tallos (PSTA)*. Cada vez que se realiza una medición se destruyen las plantas por lo que en esta situación no hay seguimiento de los individuos pero si de las variables las cuales son las mismas en todo el período. En consecuencia el método adecuado es el STATIS dual el cual contempla el caso en que los individuos cambian al pasar de un “instante” al otro.

La evolución se analiza usando la métrica de Hilbert Schmitd que nos permite medir la distancia entre las 11 matrices de correlación correspondientes a cada uno de los meses y construir diagramas bidimensionales en los cuales se pueden observar los cambios en la estructura correlacional y en las distancias entre esas matrices. Para explicar las variaciones observadas se usan las trayectorias de las variables lo cual consiste en obtener representaciones planas de la evolución de cada una de ellas en todo el período.

---

\*CIMPA-PIMAD, Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, 2060 San José, Costa Rica.

Mediante esta metodología encontramos que los dos meses finales del período (diciembre y enero) presentan los más fuertes cambios en la evolución. A su vez los meses iniciales (marzo a julio) son estables con excepción de abril y mayo.

Observando las trayectorias de las variables se detectó que las variaciones al final del período obedecen a cambios significativos en: Altura, AFV, PSHV y PSCO.

Además de lo anterior, se aplicó el mismo método para hacer un estudio comparativo de tres variedades de caña de azúcar: CP72-2086, Q96 y NA56-42, con base en mediciones realizadas en tres parcelas. Los datos corresponden a 9 mediciones mensuales en plantas de igual edad, para las siguientes variables: Brix, Glucosa (Glu), Pol del jugo (Pol), Total de azúcares reductores (Rtot), Fructuosa (Fru), Pureza (Pur), Fibra (Fibra) y Rendimiento (Ren).

Se encontró que la estructura correlacional de las variables en cada variedad es idéntica. A nivel de las edades de las plantas se observaron ciertas variaciones entre variedades, las cuales se explican por los cambios observados en las trayectorias.

## UN MÉTODO MULTIVARIADO PARA MEDIR LA SATISFACCIÓN DEL CLIENTE

BELMER GARCÍA-NEGRILLO \*

---

### Resumen

Supóngase que se tiene un sensor de  $w$  dimensiones (por ejemplo: satisfacción general, confiabilidad, disponibilidad, etc.), cada dimensión con  $p_j$  items, para  $j = 1, \dots, w$ ; además, la muestra está dividida en  $h$  estratos, donde cada estrato tiene  $n_i$  individuos, para  $i = 1, \dots, h$ . Se determina la confiabilidad del sensor (cuestionario), las correlaciones canónicas entre las dimensiones y la satisfacción general del cliente, después se determina la función de satisfacción, donde se encuentra el peso con que cada dimensión participa de la satisfacción del cliente, y por último se hace el análisis de medias, determinando los picos y valles, así como el grado de satisfacción.

---

\*Av. Atilio Martini 469, Cidade Universitaria, CEP 13084-750 Campinas SP, Brasil.  
Fax: (019) 239 5808



## ANÁLISIS DE PROXIMIDADES USANDO SOBRECALENTAMIENTO SIMULADO

JAVIER TREJOS\* - MARIO VILLALOBOS †

### Resumen

En el presente artículo se presentan algunos de los métodos conocidos para resolver el problema de Análisis de Proximidades (MDS), como el Algoritmo de Kruskal y el método SMACOF. Se presenta un nuevo algoritmo para encontrar los mínimos globales del problema de MDS, que se obtiene de aplicar Sobrecalentamiento Simulado al problema. Un ejemplo numérico de la aplicación de este nuevo método a un ejemplo es dado.

**Palabras Clave:** Multidimensional scaling (MDS), sobrecalentamiento simulado, optimización global, SMACOF, tunneling, algoritmo de Kruskal, implementación computacional.

### 1 Introducción

El Análisis de Proximidades (MDS por las siglas en inglés para *MultiDimensional Scaling*) cubre una variedad técnicas en el área del Análisis Multivariado de Datos.

Dadas las disimilitudes entre un conjunto de  $n$  objetos o individuos, en MDS se busca representar gráficamente los objetos o individuos en un espacio de dimensión pequeña (preferiblemente 2 ó 3), de manera que las distancias (euclídeas o no) entre los puntos que representan a los objetos sea lo más "cercano" posible a las disimilitudes dadas entre los objetos. Más adelante se definirán con detalle los conceptos antes mencionados.

El desarrollo inicial de esta teoría se dió gracias a Psicólogos matemáticos, estando la revista "Psychometrika" a la cabeza en la publicación de artículos en este campo.

En el caso en que las disimilitudes dadas sean distancias euclídeas, Torgerson (1958) resolvió el problema mediante diagonalización (ver Davison (1992))

\*PIMAD, Centro de Investigaciones en Matemática Pura y Aplicada (CIMPA), Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, 2060 San José, Costa Rica Tel. (506) 207-5574, Fax.(506) 207-4397, jtrejos@cariari.ucr.ac.cr

†Misma dirección, mvillalo@cariari.ucr.ac.cr

Los primeros en darle impulso al MDS, para el caso general, fueron Shepard (1962) y Kruskal (1964a,b) que proponen métodos para resolver el problema.

Después de éstos, otros han escrito trabajos basados en la forma de minimizar "la función de costo", entre las disimilitudes dadas y las distancias calculadas a partir de la representación. Esta función de costo ha sido definida de varias formas (ver Torgerson (1958), Gower (1966), Young y De Leeuw (1977), Kruskal(1964a,b)).

Las aplicaciones de MDS se pueden encontrar en muchas áreas, como Psicología, Ciencias Políticas, Economía, Bibliometría, Modelación Química, Antropología, Mercadeo, Educación, Geografía, Historia, Acústica (ver Davison (1992), pág. 6).

## 2 Algunos métodos conocidos

### 2.1 El Algoritmo de Kruskal

El primer método para realizar un MDS fue propuesto por Kruskal (1964a,b) y éste se basa en un método de Descenso del Gradiente. La función de costo a minimizar, llamada Stress normalizado, está dada por:

$$S = \sqrt{\frac{t \sum_{i < j} (d_{ij} - \hat{d}_{ij})^2}{\sum_{i < j} \hat{d}_{ij}^2}}$$

donde los  $\hat{d}_{ij}$  son una transformación de las disimilitudes dadas  $\delta_{ij}$  de manera que preserven el orden de las mismas. Los  $d_{ij}$  representan la distancia entre los puntos  $\vec{x}_i, \vec{x}_j \in \mathbb{R}^p$ ,

$$d_{ij} = \sqrt{\sum_{s=1}^p (\vec{x}_{is} - \vec{x}_{js})^2},$$

o alguna otra distancia, como la City-Block, la distancia de Chebyshev, etc.

Se considera a  $S$  como una función de  $(x_{11}, \dots, x_{1p}, x_{21}, \dots, x_{2p}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{np})$  o sea  $S = S(x_{11}, \dots, x_{1p}, x_{21}, \dots, x_{2p}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{np})$ , entonces el problema es encontrar la configuración de puntos que minimiza

$$S(x_{11}, \dots, x_{1p}, x_{21}, \dots, x_{2p}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{np}).$$

El algoritmo propuesto por Kruskal es el siguiente:

1. Determinar una configuración inicial  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in \mathbb{R}^p$
2. Calcular  $d_{ij}$  para  $i, j \in \{1, \dots, n\}$
3. Calcular una transformación  $\hat{d}_{ij} = M(\delta_{ij})$  que mantenga el orden de los  $\delta_{ij}$ , y que haga  $S$  mínimo.
4. Para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  calcular el gradiente negativo de  $S$  con respecto a los  $x_{is}$  sea

$$\vec{g}_i^t = \left( -\frac{\partial S}{\partial x_{i1}}, \dots, -\frac{\partial S}{\partial x_{ip}} \right)$$

5. Para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  se efectúa un pequeño desplazamiento de  $\vec{x}_i \in \mathbb{R}^p$  en la dirección de  $\vec{g}_i$  obteniéndose

$$\tilde{\vec{x}}_i = \vec{x}_i + \beta \vec{g}_i$$

donde  $\beta \in \mathbb{R}$  es un coeficiente escogido adecuadamente,

6. Se reinicia el proceso (paso 2) con la nueva configuración de puntos  $\tilde{\vec{x}}_1, \dots, \tilde{\vec{x}}_n$ .

El algoritmo se detiene cuando dos configuraciones están "cercanas". Los detalles del algoritmo se pueden consultar en Kruskal (1964a,b) o en Villalobos (1998).

## 2.2 El método SMACOF

Este método surge de la aplicación del algoritmo de mayorización para minimizar funciones complicadas al problema de MDS. SMACOF (*Scaling by MAjorizing a COmplicated Function*) inicialmente fue propuesto por de Leeuw (1977b) y refinado y estudiado por de Leeuw y Heiser (1977,1980), de Leeuw (1988), Heiser (1988), de Leeuw (1992), Groenen (1993), Mathar et al (1995), entre otros.

En el algoritmo de mayorización lo que se hace es buscar una función que sea más fácil de optimizar que la función original, esta función debe cumplir ciertas condiciones especiales; más explícitamente, si  $\varphi(x)$  es la función a optimizar, se busca una función  $\hat{\varphi}(x, y)$  que cumpla con lo siguiente:

- $\hat{\varphi}(x, y)$  es más simple de optimizar que  $\varphi(x)$
- $\varphi(x) \leq \hat{\varphi}(x, y)$
- $\hat{\varphi}(x, x) = \varphi(x)$ .

Si  $x^*$  es el mínimo de  $\hat{\varphi}(x, y)$  sobre los  $x$ , se tiene la siguiente desigualdad

$$\varphi(x^*) \leq \hat{\varphi}(x^*, y) \leq \hat{\varphi}(y, y) = \varphi(y),$$

lo que nos garantiza que la sucesión definida por (4) tendrá valores de Stress no crecientes.

El algoritmo de mayorización está dado por

1.  $y \leftarrow y_0$  donde  $y_0$  es el valor inicial.
2. Encontrar  $x^*$  para el cual  $\hat{\varphi}(x^*, y) = \min_x \hat{\varphi}(x, y)$
3. Si  $\varphi(y) - \varphi(x^*) < \varepsilon$  parar, ( $\varepsilon$  un número positivo "pequeño")
4.  $y \leftarrow x^*$  ir al paso 2.

La función de costo en este caso está dada por el "Stress" ponderado:

$$\sigma^2(X) = \sum_{i < j} w_{ij} (\delta_{ij} - d_{ij}(X))^2 \quad (1)$$

$$= \sum_{i < j} w_{ij} \delta_{ij}^2 + \sum_{i < j} w_{ij} d_{ij}^2(X) - 2 \sum_{i < j} w_{ij} \delta_{ij} d_{ij}(X) \quad (2)$$

$$= \eta_\delta^2 + \eta^2(X) - 2\rho(X) \quad (3)$$

donde los  $\delta_{ij}$  son las disimilitudes dadas, los  $w_{ij}$  son pesos,  $d_{ij}(X)$  es la distancia entre los puntos  $\vec{x}_i, \vec{x}_j \in \mathbb{R}^p$ , a saber

$$d_{ij}(X) = \left( \sum_{s=1}^p (x_{is} - x_{js})^2 \right)^{1/2} = \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|,$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se hace la siguiente mayorización para  $-\rho(X)$ :

$$-\rho(X) = -\sum_{i < j} w_{ij} \delta_{ij} d_{ij}(X) \leq -\sum_{i < j} b_{ij}(Y) (\vec{x}_i - \vec{x}_j)^t (y_i - y_j) = -\hat{\rho}(X, Y).$$

donde

$$b_{ij}(Y) = \begin{cases} \frac{w_{ij} \delta_{ij}}{d_{ij}(Y)} & \text{si } d_{ij}(Y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } d_{ij}(Y) = 0. \end{cases}$$

Las funciones que se tienen pueden ser escritas en forma matricial como

$$\hat{\rho}(X, Y) = \text{tr}(X^t B(Y) Y), \quad \rho(X) = \text{tr}(X^t B(X) X), \quad \text{y } \eta(X) = \text{tr}(X^t V X)$$

donde  $V$  es la matriz que tiene como elementos fuera de la diagonal a  $-w_{ij}$  y en la diagonal a  $\sum_{i < j} w_{ij}$ , con lo que

$$\sigma^2(X) = \eta^2 + \text{tr}(X^t V X) - 2\text{tr}(X^t B(X) X)$$

y la función que la mayoriza es

$$\hat{\sigma}^2(X, Y) = \eta^2 + \text{tr}(X^t V X) - 2\text{tr}(X^t B(Y) Y),$$

que tiene su mínimo cuando su gradiente con respecto a  $X$  se hace cero:

$$\nabla \hat{\sigma}^2(X, Y) = 2VX - 2B(Y)Y = 0,$$

que nos da  $X = V^+ B(Y) Y$  (aquí  $V^+$  se refiere a la inversa generalizada de Moore-Penrose de  $V$ ).

De ahí se obtiene la siguiente sucesión:

$$X_{m+1} = V^+ B(X_m) X_m = \Gamma(X_m). \quad (4)$$

El operador  $\Gamma(X)$  es llamado *Transformada de Guttman*. La sucesión obtenida por (4) nos da las siguientes sucesiones de valores  $\sigma_m^2 = \sigma^2(X_m)$ ,  $\rho_m = \rho(X_m)$ ,  $\eta_m = \eta(X_m)$ . También genera las sucesiones  $\lambda_m = \rho_m / \eta_m$  y  $\varepsilon_m^2 = \eta^2(X_m - \Gamma(X_m))$ .

Para estas sucesiones se tienen los siguientes teoremas (se asume que  $\eta_0^2 = 1$ ), cuya demostración se puede encontrar en de Leeuw (1988)

**Teorema 1:**

- La sucesión  $\sigma_m^2$  es decreciente y converge a  $\sigma_\infty^2$ .
- Las sucesiones  $\rho_m$  y  $\eta_m^2$  son crecientes y convergen al mismo valor  $1 - \sigma_\infty^2$ .
- La sucesión  $\lambda_m$  es creciente y converge a  $\sqrt{1 - \sigma_\infty^2}$ .
- La sucesión  $\varepsilon_m$  converge a 0.

Este teorema no dice nada acerca de la convergencia de la sucesión  $X_m$ , para esto se tiene el siguiente resultado,

**Teorema 2:**

- El conjunto de los puntos de acumulación de la sucesión  $(X_m)$  no es vacío,
- si  $X_\infty$  es un punto de acumulación de la sucesión  $(X_m)$  entonces  $\sigma(X_\infty) = \sigma_\infty$ .

**3 El Método de Tunneling**

En vista de que SMACOF puede converger a un óptimo local del stress, se ha propuesto el Método de Tunneling (excavación de túneles), que para un mínimo local obtenido se trata de encontrar otra configuración con el mismo valor de stress y a partir de ahí volver a encontrar otro mínimo local con un valor inferior de stress, hasta que no se pueda obtener un nuevo mínimo de este tipo. Para la búsqueda de estos otros puntos, se obtienen los ceros de la función de Tunneling dada por

$$\tau(X) = (\sigma(X) - \sigma(X^*))^{2\lambda} \left( 1 + \frac{1}{\|D(X^*) - D(X)\|_W^2} \right)$$

donde  $X^*$  es la configuración donde se tiene el mínimo local (ver de Leeuw (1988)).

Tampoco para este método se garantiza la obtención del óptimo global.

**4 Sobrecalentamiento Simulado**

El problema que se presenta con los métodos de Kruskal, SMACOF y Tunneling es que no se puede garantizar la obtención del mínimo global del stress, sólo se podrán garantizar mínimos locales. Por lo tanto, estamos buscando métodos para poder obtener los óptimos Globales.

Para ello, estamos estudiando la implementación de técnicas de optimización estocástica global. Una de estas es la técnica llamada Sobrecalentamiento Simulado (SS), que se basa en el algoritmo de Metropolis.

#### 4.1 El Algoritmo de Metropolis

Este es un método estocástico para la búsqueda de óptimos globales, fue introducido por Kirkpatrick, Gelatt y Vecchi (1982,1983) e independientemente por Černý (1985), y se basa en el proceso físico de sobrecalentamiento de sólidos para producir cristales. El término sobrecalentamiento debe entenderse como el proceso térmico por el cual se obtienen estados de baja energía de un sólido, al ser calentado a altas temperaturas. Éste tiene dos fases, a saber:

- Aumentar la temperatura hasta que el sólido se funde.
- Disminuir suavemente la temperatura hasta que las partículas se equilibren formando un cristal muy puro.

Este proceso puede ser simulado en el computador, basándose en una técnica de Monte Carlo, mediante una sucesión de estados del sólido de la siguiente manera: dado un estado  $I$  con energía  $E_I$ , el siguiente estado  $J$ , con energía  $E_J$ , es generado a partir de éste aplicando una perturbación, por ejemplo desplazando una partícula. Si la diferencia de energías,  $E_J - E_I$ , es menor o igual a 0, se acepta el estado  $J$ , y si no el estado  $J$  es aceptado con una cierta probabilidad dada por

$$\exp\left(\frac{E_I - E_J}{\kappa_B T}\right),$$

donde  $T$  denota la temperatura y  $\kappa_B$  es la constante de Boltzman. Esta regla de aceptación es conocida como la *Regla de Metropolis* y el algoritmo correspondiente como el *Algoritmo de Metropolis*

#### 4.2 El Algoritmo de Sobrecalentamiento Simulado

Se aplicará aquí el algoritmo de Metropolis para generar una sucesión de soluciones del problema de optimización. Se debe, pues, hacer una analogía entre el problema físico y el problema de optimización, basándose en las siguientes equivalencias:

- Las soluciones del problema de optimización son equivalentes a los estados del sistema físico.
- El valor de la solución es equivalente a la energía del estado.

Se introduce un parámetro de control, que juega el rol de la temperatura. Entonces el algoritmo de SS puede ser visto como un iteración del algoritmo de Metropolis, evaluado para valores decrecientes del parámetro de control.

Para poder dar el algoritmo de SS, necesitamos escribir formalmente ciertos términos, a saber: un problema de optimización será un par  $(\mathcal{V}, f)$  donde  $\mathcal{V}$  es el espacio de todas las posibles soluciones y  $f$  es la *función de costo* definida como una función  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ . Se dirá que  $I$  es un estado si  $I \in \mathcal{V}$ ; se dice que un estado  $J$  es un *vecino* del estado  $I$ , si  $J$  puede ser generado a partir de  $I$ , por medio de una perturbación;  $\mathcal{V}_I =$

{ $J \in S / J$  es vecino de  $I$ }; el criterio de aceptación determinado cuando  $J$  es aceptado a partir de  $I$  aplicando la siguiente probabilidad de aceptación

$$P_c\{\text{aceptar } J\} = \begin{cases} 1 & \text{si } f(J) \leq f(I) \\ \exp\left(\frac{f(I) - f(J)}{c}\right) & \text{si } f(J) > f(I), \end{cases}$$

donde  $c$  es el parámetro de control. El algoritmo presentado a continuación es iterativo, y corresponde a la modelación con cadenas de Markov homogéneas en la prueba de la convergencia asintótica, donde una transición es el paso de un estado al siguiente. La  $k$ -ésima cadena de Markov tiene longitud  $L_k$  y tiene asociado un valor fijo del parámetro de control, denotado  $c_k$ . Este parámetro disminuye al iniciar una nueva cadena de Markov. El algoritmo de SS se describe, en pseudo PASCAL, en el cuadro.

En este algoritmo se asume que el valor de  $c_0$  representa una "temperatura alta", y al calcular la nueva temperatura  $c_{k+1} = \Gamma(c_k)$  (por ejemplo,  $c_{k+1} = \gamma c_k$ ,  $\gamma < 1$ ) se está "enfriando" la temperatura. Usualmente,  $L_k$  depende de la temperatura y es más grande conforme la temperatura desciende.

Se puede garantizar, bajo ciertas condiciones de las cadenas de Markov que este algoritmo converge asintóticamente al óptimo global; para los detalles de esta prueba se puede consultar Aarts y Korst (1988).

### 5 El método Propuesto

Como se vió en la sección anterior, para poder aplicar el algoritmo de SS a un problema de optimización debemos definir un estado  $I$  y el conjunto de estados  $\mathcal{V}$ , la función de costo o función a optimizar, el conjunto  $\mathcal{V}_I$  de vecinos de un estado  $I$ , y cómo se genera el estado siguiente,  $J$ , a partir del estado  $I$ , determinar cómo se calculará la temperatura y el número de transiciones.

#### 5.1 Características

En vista de que en MDS lo que se quiere es representar en  $\mathbb{R}^p$  los  $n$  individuos, entonces un estado  $I$  debe ser una  $n$ -tupla de elementos de  $\mathbb{R}^p$  donde cada elemento representa a

```

PROCEDURE S.Simulado;
BEGIN
  Inicializar ( $I_0, c_0, L_0$ );
   $k := 0$ ;
   $I := I_0$ ;
  REPEAT
    FOR  $L := 1$  TO  $L_k$  DO BEGIN
      Generar( $J$  de  $\mathcal{V}_I$ );
      IF  $E_J \leq E_I$  THEN
         $I := J$ ;
      ELSE
        IF  $\exp\left(\frac{E_I - E_J}{c_k}\right) > \text{random}[0, 1)$  THEN
           $I := J$ ;
    END;
     $k := k + 1$ ;
    Calcular_Largo( $L_k$ );
    Calcular_Control( $c_k$ );
  UNTIL Criterio_de_Parar;
END;
    
```

un individuo, y para que se cumplan las condiciones que se necesitan para que el algoritmo converja se debe discretizar  $\mathbb{R}^p$  por medio de un mallado, como se ve a continuación:

$$I \equiv [\bar{x}_1^I, \bar{x}_2^I, \dots, \bar{x}_n^I],$$

donde para cada estado  $I$  e  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\bar{x}_i^I \in (h\mathbb{Z})^p$ , con  $h\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} / x = hr, r \in \mathbb{Z}\}$  y  $h \in \mathbb{R}$  es un valor fijo, que determina el grueso de la malla. De aquí se tiene entonces que  $\mathcal{V}$  es el conjunto de estas  $n$ -tuplas, se dirá que dos estados  $I, J$  son vecinos si existe un  $l \in \{1, \dots, n\}$  y  $\bar{\alpha} \in \{-1, 0, 1\}^p$ ,  $\|\bar{\alpha}\| \neq 0$  tal que

$$\bar{x}_i^J = \begin{cases} \bar{x}_i^I & \text{si } i \neq l, i \in \{1, \dots, n\} \\ \bar{x}_i^I + h\bar{\alpha} & \text{si } i = l. \end{cases} \quad (5)$$

En este caso  $|\mathcal{V}_i| = (3^p - 1)n$ .

Para generar el estado  $J$  a partir del estado  $I$  se sigue el siguiente algoritmo:

**Generar( $J, I$ )** (generar estado  $J$  a partir del estado  $I$ )

1. Escoger al azar  $l \in \{1, \dots, n\}$ , el punto a perturbar será  $\bar{x}_l^I$ .
2. Escoger al azar  $\bar{\alpha} \in \{-1, 0, 1\}^p$ ,  $\|\bar{\alpha}\| \neq 0$
3. Defínase el estado  $J$  de acuerdo con (5)

La función a optimizar, Stress, será la usada en el método SMACOF,

$$\sigma^2(I) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} (\delta_{ij} - d_{ij}(I))^2 \quad (6)$$

donde  $I$  es un estado,  $d_{ij}(I) = d(x_i^I, x_j^I) = \|x_i^I - x_j^I\|$

Para el cálculo de la temperatura se usará  $c_{k+1} = \gamma c_k$  con  $0 < \gamma < 1$ , y para la logitud de las cadenas de Markov se tomará como un factor del número de individuos, es decir  $L_k = F_L \cdot n$ ,  $F_L$  es un factor predeterminado, y no se harán cambios en el proceso.

Una forma de determinar la temperatura inicial  $c_0$  puede ser dada por  $c_0 = \frac{\overline{\Delta\sigma^*}}{\ln(\chi_0^{-1})}$ , donde  $\overline{\Delta\sigma^*}$  es el promedio de los cambios positivos en el Stress en una serie de ensayos de aprendizaje,  $\chi_0$  es la tasa inicial de los estados que aumentan  $\sigma^2$  que pueden ser aceptados.

## 5.2 Simplificaciones Importantes

Al calcular  $\sigma^2(J)$ , se debería hacer un gran número de cálculos, pero el hecho de que ya se tiene calculado  $\sigma^2(I)$  y  $J$  se genera a partir de  $I$  modificando solo un punto de la  $n$ -tupla sólo hace falta modificar los  $d_{li}(I) = d_{il}(I)$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  y  $l$  es la posición que se va a modificar para obtener  $J$ , de donde  $\sigma^2(J)$  se calcula a partir de  $\sigma^2(I)$  restándole los términos que tengan a  $d_{li}(I)$  o  $d_{il}(I)$  y sumándole los correspondientes términos del estado  $J$ , de la siguiente manera:



$$\sigma^2(J) = \sigma^2(I) - \sum_{i=1}^n (w_{il}(\delta_{il} - d_{il}(I))^2 + w_{li}(\delta_{li} - d_{li}(I))^2) \quad (7)$$

$$+ \sum_{i=1}^n (w_{il}(\delta_{il} - d_{il}(J))^2 + w_{li}(\delta_{li} - d_{li}(J))^2) \quad (8)$$

### 5.3 El Algoritmo

Con lo establecido en las secciones anteriores, el algoritmo de SS aplicado a MDS queda de la siguiente manera:

PROCEDURE SCALSS;

BEGIN

Inicializar ( $I_0, c_0, \gamma$ );

$k := 0; I := I_0;$

$c_k := c_0; L_k := F_L * n;$

$f_i := \sigma^2(I);$

$opt := I; f_{opt} := f_i; \{estado\ optimo\}$

REPEAT

FOR  $L := 1$  TO  $L_k$  DO BEGIN

Generar( $J, I$ );

$f_J := \text{Calcular}(\sigma^2(J)); \{de\ acuerdo\ con\ (7)\}$

IF  $f_J \leq f_I$  THEN BEGIN

$I := J; f_I := f_J;$

IF  $f_I < f_{opt}$  THEN BEGIN

$opt = I; f_{opt} = f_I;$

END;

END;

ELSE BEGIN

IF  $\exp\left(\frac{f_I - f_J}{c_k}\right) > \text{random}[0, 1)$  THEN BEGIN

$I := J; f_I := f_J;$

END

END

END;

$k := k + 1;$

Calcular\_Largo( $L_k$ );

$c_k := c_k \gamma;$

UNTIL Criterio\_de\_Parar;

END;

En este algoritmo se guarda siempre la mejor solución encontrada, en  $opt$ .

El criterio de parar puede darse por una de las siguientes opciones:

1. Cuando la temperatura esté baja, o sea el parámetro de control sea casi 0.

2. Cuando el óptimo encontrado, después de cada iteración, se repita un número determinado de veces.
3. Después de un número determinado de iteraciones.
4. Cuando el usuario desee detenerlo.
5. Una combinación de los anteriores.

## 6 Implementación Computacional

La implementación computacional se hizo en lenguaje PASCAL, versión 7, se está utilizando un computador 486 100Mhz con 8 MB de memoria. El programa se llama SCAL\_SS (SCALing con Sobrecalentamiento Simulado).

Para la programación del algoritmo se trabaja en  $\mathbb{R}^2$ , de tal modo que la representación se pueda observar mejor.

Para el cálculo del grueso  $h$  de la malla se calcula la distancia más grande entre las disimilitudes dadas y se divide esto en un número dado, en el programa se toma este número como 500, que puede ser variado pues es un parámetro dentro el programa; las coordenadas de los puntos del estado inicial se toma al azar en un rango de  $-500h$  a  $500h$ .

En vista de que en el problema MDS una rotación de una solución también es solución, pues las distancias entre puntos es invariante bajo traslaciones, rotaciones e inversiones, se programó también un procedimiento que centra los datos, y en el que se puede manejar el gráfico para poder ver mejor el resultado.

## 7 Resultados Numéricos

El programa se aplicó a los datos siguientes, que son las distancias en línea recta entre diferentes ciudades de Costa Rica. Ver Villalobos (1998) para otros ejemplos.

Para este caso se tomó el factor de disminución de la temperatura  $\lambda = 0.95$ , el factor para las longitudes de las cadenas de Markov  $F_k = 400$ , la temperatura inicial se toma inicialmente  $c_0 = 1000$ . Para el criterio de parada se utiliza cuando la temperatura sea casi cero (menor que 0.1) o cuando el usuario lo desee.

### 7.1 Las ciudades de Costa Rica.

Los datos son las distancias entre las ciudades de San José, Alajuela, Heredia, Cartago, Puntarenas, Liberia, Nicoya, Limón, San Isidro y Golfito. Esta dadas en la siguiente tabla:

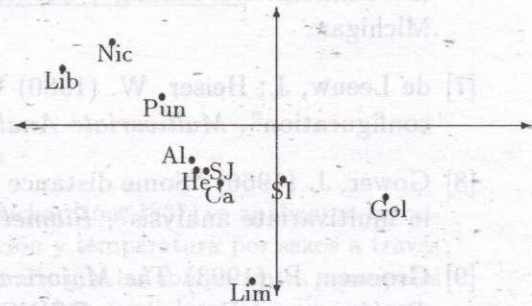
	SJ	Al	Ca	He	Pun	Lim	Lib	Nic	SI	Gol
1) San José	0.0	18.0	18.0	9.0	82.5	114.0	168.0	151.5	73.5	172.5
2) Alajuela	18.0	0.0	36.0	10.5	67.5	127.5	150.0	135.0	90.0	184.5
3) Cartago	18.0	36.0	0.0	25.5	99.0	97.5	186.0	169.5	60.0	157.5
4) Heredia	9.0	10.5	25.5	0.0	78.0	118.5	160.5	145.5	82.5	181.5
5) Puntarenas	82.5	67.5	99.0	78.0	0.0	195.0	97.5	70.5	139.5	232.5
6) Limón	114.0	127.5	97.5	118.5	195.0	0.0	271.5	264.0	100.5	150.0
7) Liberia	168.0	150.0	186.0	160.5	97.5	271.5	0.0	54.0	234.0	330.0
8) Nicoya	151.5	135.0	169.5	145.5	70.5	264.0	54.0	0.0	208.5	300.0
9) San Isidro	73.5	90.0	60.0	82.5	139.5	100.5	234.0	208.5	0.0	99.0
10) Golfito	172.5	184.5	157.5	181.5	232.5	150.0	330.0	300.0	99.0	0.0

Al aplicar el programa SCALSS a estos se obtiene el gráfico contiguo.

El valor del stress que se obtuvo para esta solución es  $\sigma^2(opt) = 46.16311$  que al ponderarlo con respecto a la suma de los cuadrados de las disimilitudes,

$$\eta_{\delta}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij}^2, \text{ se obtiene } 0.0000221445.$$

Es necesario hacer una rotación y una transposición para poder ver el resultado de acuerdo con la posición usual en el mapa.



## 8 Conclusiones y Perspectivas

En la mayoría de las ejecuciones del programa, se ha obtenido el mínimo global. Se tiene que ver la posibilidad de iniciar con un malla grueso, para saltarse los mínimos locales al inicio, y luego, al final, ir afinándolo para evitar el error que se produce al discretizar  $IR$ . También se debe ver qué variaciones se le pueden hacer al algoritmo, para mejorar el tiempo de convergencia, tales como hacer intercambios de los puntos de la configuración inicial, o hacer una etapa sólo de descenso al inicio. Hay que hacer un estudio del porcentaje de atracción que tiene el mínimo global. Se debe ver la posibilidad de aplicar otros métodos de optimización estocástica tales como Búsqueda Distribuida y Algoritmos Genéticos, o el algoritmo de Búsqueda Tabú. Se está estudiando la posibilidad de aplicar el método en el caso en que la métrica no sea la euclídea. Finalmente, se está haciendo una serie de pruebas comparativas con otros métodos.

## Bibliografía

- [1] Aarts E.M.; Korst, J. (1988) *Simulated Annealing and Boltzmann Machines: A Stochastic Approach to Combinatorial Optimization and Neural Computing*. John Wiley & Sons, Chichester.

- [2] Černý, V. (1985) "Thermodynamical approach to the traveling salesman problem: an efficient simulated annealing algorithm", *Journal of Optimization Theory and Applications*, **45**:41-51.
- [3] Davison, M. (1992) *Multidimensional Scaling*. Krieger Publishing Compay, Florida.
- [4] de Leeuw, J. (1977) "Applications of convex analysis to multidimensional scaling", *Recent Developments in Statistics*. J.R. Barra et al (Eds.). Amsterdam.
- [5] de Leeuw, J. (1988) "Convergence of the majorization method for multidimensional scaling", *Journal of Classification*, **5**:163-180.
- [6] de Leeuw, J.; Heiser, W. (1977) "Convergence of correction matrix algorithms for multidimensional scaling", *Geometric Representations Data*. P.R. Krishnalaha (Ed.). Michigan.
- [7] de Leeuw, J.; Heiser, W. (1980) "Multidimensional scaling with restrictions on the configuration", *Multivariate Analysis*. P.R. Krishnalaha (Ed.). Amsterdam.
- [8] Gower, J. (1966) "Some distance properties of latent root and vector methods used in multivariate analysis", *Biometrika*, **53**:325-388.
- [9] Groenen, P. (1993) *The Majorization Approach to Multidimensional Scaling: Some Problems and Extensions*. DSWO Press, Leiden.
- [10] Heiser, W. (1988) "Multidimensional scaling with least absolute residuals", *Classification and Related Methods of Data Analysis*. H.H. Bock (Ed.). Amsterdam.
- [11] Kirpatrick, S.; Gelatt C. Jr.; Vecchi, M. (1983) "Optimization by simulated annealing", *Science*, **220**:671-680.
- [12] Kruskal, J. (1964a) "Multidimensional scaling by optimizing goodness of fit to a nonmetric hypothesis", *Psychometrika*, **29**:1-27.
- [13] Kruskal, J. (1964b) "Nonmetric multidimensional scaling: a numerical method", *Psychometrika*, **29**: 115-129.
- [14] Shepard, R. N. (1962) "The analysis of proximities: Multidimensional scaling with an unknown distance function", *Psychometrika*, **27**:125-140,219-246.
- [15] Takane, Y.; Young, F.; de Leeuw, J. (1977) "Nonmetric individual differences in multidimensional scaling: an alternating least squares method with optional scaling features", *Psychometrika*, **42**:7-67.
- [16] Torgerson, W. S. (1958) *Theory and methods of scaling*. John Wiley & Sons, New York.
- [17] Villalobos, M. (1998) *Optimización Estocástica para el Análisis de Proximidades*. Tesis de Maestría, Universidad de Costa Rica.

COMPORTAMIENTO DEL PESO GONADAL EN EL  
ESTUDIO POR SEXO DEL PEZ DORMITATOR  
LATIFRONS EN MATA DE COROZO, PACORA,  
PANAMÁ

CÉSAR VILLAREAL\* – AURORA MEJÍA\* – GONZALO CARRASCO\*

---

**Resumen**

En el estudio del pez *Dormitator latifrons* (Richardson, 1837) se analizaron las variables largo total, peso total, caudal, precipitación y temperatura por sexos a través del uso de las componentes principales. En el análisis de las componentes principales aplicados a los datos originales de las hembras se determinó las tres primeras componentes principales cuya proporción de la variación total explicada acumulada es igual a 87.97%; en el caso de los machos se determinó las dos primeras componentes principales, los cuales explican el 83.67% de la variabilidad total de dichos datos.

**Palabras-clave:** análisis en componentes principales, uso de las componentes principales, efectos de las variables originales, regresión lineal múltiple, regresión regularizada.

---

\*UNIVERSIDAD DE PANAMÁ, REPÚBLICA DE PANAMÁ; E-MAIL:  
DSANCHEZ@ANCON.UP.AC.PA

## 1 Introducción

El presente trabajo se ha efectuado con la información recolectada del pez *Dormitator latifrons* (Richardson, 1837) durante el año 1992, donde los peces fueron capturados en un lago artificial ubicado en la localidad de Mata de Corozo corregimiento de Pacora, Provincia de Panamá, República de Panamá que realizó el laboratorio de investigación Dr. Erich Graetz del Departamento de Fisiología y Comportamiento Animal de la Facultad de Ciencias Naturales Exactas y Tecnología de la Universidad de Panamá. Dicho estudio tiene como objetivo primordial medir el efecto lineal de las variables *largo total*, *peso total*, *caudal*, *precipitación* y *temperatura* a través de las componentes principales en el comportamiento de la variable *peso gonadal* en el estudio por sexo del pez *Dormitator latifrons*.

El análisis consistió en generar las componentes principales por sexo a través de las variables *largo total*, *peso total*, *caudal*, *temperatura* y *precipitación*, y asociar dichas variables a las componentes principales a través del estudio de la proporción de la variación total de las variables originales explicadas por las componentes principales y las correlaciones entre las variables originales y las componentes principales; con ello, posteriormente se efectuó un análisis de regresión lineal múltiple considerando a la variable *peso gonadal* como variable dependiente y a la primera, segunda y tercera componentes principales como variables independientes en el estudio de las hembras, y en el estudio de los machos se considera a la primera y segunda componentes principales como variables independientes.

## 2 Análisis en componentes principales

### 2.1 Análisis de las hembras

Seleccionamos las tres primeras componentes principales cuya variación total explicada supera el 80%.

Cuando examinamos la proporción de la variación original explicada por las componentes principales (Tabla 2) y la correlación de las variables con las tres primeras componentes principales (Tabla 3), podemos asociar las variables *largo total*, *precipitación* y *caudal* a la primera componente principal, por tener dichas variables coeficientes mayores en valor absoluto, y las variables *peso total*, *precipitación* y *temperatura* asociadas a la segunda componente principal. Finalmente, un promedio ponderado de las variables estudiadas con respecto a la tercera componente principal, donde no inter-

Tabla 1: Valores propios y proporción de la variación total explicada por las componentes principales en el estudio de las hembras del pez *Dormitator latifrons* en la localidad de Mata de Corozo, Corregimiento de Pacora: Año 1992

Componentes	Valores propios	Proporción de la variación total explicada	
		Absoluta (%)	Acumulada (%)
1	1.94919	38.9838	38.984
2	1.49571	29.9142	68.898
3	0.95378	19.0756	87.974
4	0.49394	9.8788	97.852
5	0.10738	2.1476	100.00

Tabla 2: Proporción de la variación original explicada por cada componente principal de la matriz de correlación de las variables en estudio de las hembras del pez *Dormitator latifrons* en la localidad de Mata de Corozo, Corregimiento de Pacora: Año 1992

Variables	Componentes				
	1	2	3	4	5
Largo total	0.398	0.185	0.180	0.237	0.000
Peso total	0.289	0.423	0.100	0.237	0.001
Precipitación	0.504	0.342	0.000	0.016	0.046
Caudal	0.710	0.055	0.191	0.001	0.042
Temperatura	0.007	0.490	0.482	0.003	0.017

viene en ese promedio la variable *precipitación* y una mayor influencia pero con signo negativo la variable *temperatura*.

## 2.2 Análisis de los machos

Seleccionamos las dos primeras componentes principales cuya variación total explicada es superior al 80%.

Al analizar los tablas 5 y 6 podemos asociar las variables *largo total*, *peso total*, *caudal* y *precipitación* a la primera componente principal y las variables *precipitación* y *caudal* a al segunda componente principal, por tener las variables asociadas coeficientes altos en cada una de las componentes

Tabla 3: Correlación de las variables originales con las tres primeras componentes principales en el estudio de las hembras del pez *Dormitator latifrons* en la localidad de Mata de Corozo, Corregimiento de Pacora: Año 1992

Variables	Componentes principales			Variación total explicada por las dos primeras componentes principales (%)
	1	2	3	
Largo total	-0.631	0.430	0.425	76.3
Peso total	-0.4899	0.650	0.316	76.2
Precipitación	0.771	0.235	0.437	95.6
Caudal	0.842	0.235	0.437	95.6
Temperatura	-0.086	0.700	-0.694	97.9

principales.

### 3 Modelo de regresión lineal múltiple

Presentaremos la utilización de las componentes principales en el modelo de regresión lineal múltiple, procedimiento conocido como regresión regularizada, considerando el *peso gonadal* como variable dependiente y como variables independientes a la primera componente principal ( $CP^1$ ) y segunda componente principal ( $CP^2$ ), respectivamente, en el estudio en los machos, y a la primera ( $CP^1$ ), segunda ( $CP^2$ ) y tercera ( $CP^3$ ) componentes principales en el estudio en las hembras, en el pez *Dormitator latifrons* en la localidad de Mata de Corozo del corregimiento de Pacora, año 1992.

#### 3.1 Estudio para los machos

Para los machos tenemos el siguiente modelo de regresión lineal:

$$\text{PesoGonadal} = 19.39 + 3.79CP^1 + 3.43CP^2$$

#### Hipótesis:

$H_0$  : No existe efecto lineal de la primera y segunda componentes principales en el comportamiento del peso gonadal de los machos en el pez *Dormitator latifrons* en la localidad de Mata de Corozo, corregimiento de Pacora.



Tabla 4: Valores propios y proporción de la variación total explicada por las componentes principales en el estudio de los machos del pez *Dormitator latifrons* en la localidad de Mata de Corozo, Corregimiento de Pacora: Año 1992

Componentes	Valores propios	Proporción de la variación total explicada	
		Absoluta (%)	Acumulada (%)
1	2.69468	53.8937	53.894
2	29.7847	29.7847	83.678
3	0.55446	11.0892	94.768
4	0.17272	3.4545	98.222
5	0.08890	1.7779	100.00

Tabla 5: Proporción de la variación original explicada por cada componente principal de la matriz de correlación de las variables en estudio de los machos del pez *Dormitator latifrons* en la localidad de Mata de Corozo, Corregimiento de Pacora: Año 1992

Variables	Componentes				
	1	2	3	4	5
Largo total	0.808	0.035	0.109	0.010	0.037
Peso total	0.829	0.033	0.082	0.019	0.036
Precipitación	0.016	0.918	0.008	0.052	0.005
Caudal	0.464	0.414	0.048	0.068	0.006
Temperatura	0.577	0.005	0.307	0.023	0.003

$H_1$  : Existe efecto lineal de la primera y segunda componentes principales en el comportamiento del peso gonadal de los machos en el pez *Dormitator latifrons* en la localidad de Mata de Corozo corregimiento de Pacora.

## Análisis de Varianza

Tabla 6: Correlación de las variables originales con las tres primeras componentes principales en el estudio de los machos del pez *Dormitator latifrons* en la localidad de Mata de Corozo, Corregimiento de Pacora: Año 1992

Variables	Componentes principales		Variación total explicada por las dos primeras componentes principales (%)
	1	2	
Largo total	0.900	0.186	84.3
Peso total	0.910	0.186	86.2
Precipitación	-0.127	0.958	93.4
Caudal	0.681	0.644	87.8
Temperatura	0.760	0.298	58.2

Fuente	<i>g.l.</i>	Suma de Cuadrados	Cuadrado Medio	Valor $F$	Prob $> F_\alpha$
Modelo	2	2313.046940	1156.523470	21.06	0.0001
Error	39	2141.669385	54.914600		
Total	41	4454.716325			

### Prueba de Hipótesis:

Variables	<i>g.l.</i>	$T : H_0 : \text{Parámetro} = 0$	Prob $>  t $
<i>Intercepto</i>	1	16.96	0.0001
$CP^1$	1	5.38	0.0001
$CP^2$	1	3.62	0.0008

## 3.2 Estudio para las hembras

Para las hembras tenemos el siguiente modelo de regresión lineal:

$$\text{PesoGonadal} = 29.43 + 0.34CP^1 + 6.54CP^2 + 7.19CP^3$$

### 3.2.1 Hipótesis:

$H_0$  : No existe efecto lineal de la primera, segunda y tercera componentes principales en el comportamiento del peso gonadal de las hembras en el pez *Dormitator latifrons* en la localidad de Mata de Corozo, corregimiento de Pacora.

$H_1$  : Existe efecto lineal de la primera, segunda y tercera componentes principales en el comportamiento del peso gonadal de las hembras en el pez *Dormitator latifrons* en la localidad de Mata de Corozo corregimiento de Pacora.

### Análisis de Varianza

Fuente	<i>g.l.</i>	Suma de Cuadrados	Cuadrado Medio	Valor $F$	Prob $> F_\alpha$
Modelo	3	5112.196144	1704.065381	15.77	0.0001
Error	39	4539.834282	108.091292		
Total	41	9652.030426			

### Prueba de Hipótesis:

Variables	<i>g.l.</i>	$T : H_0 : \text{Parámetro} = 0$	Prob $>  t $
Intercepto	1	19.20	0.0001
$CP^1$	1	0.31	0.7609
$CP^2$	1	5.16	0.0001
$CP^3$	1	4.53	0.0001

## 4 Conclusiones

A manera de conclusión, podemos enunciar los siguientes puntos:

- Las dos primeras componentes principales influyen linealmente en el peso gonadal de los machos a un nivel de significación de 0.05.
- En el estudio de los machos en el pez *Dormitator latifrons* la primera y segunda componente principal influyen linealmente de manera independientemente en el comportamiento del peso gonadal a un nivel de significación de 0.05.
- Las tres primeras componentes principales influyen linealmente en el comportamiento del peso gonadal de las hembras a un nivel de significación de 0.05.
- En el estudio de las hembras del pez *Dormitator latifrons* la primera componente principal no influye linealmente de manera independiente en el comportamiento del peso gonadal, no así con la segunda y tercera componente principal, que sí influyen de manera independiente en el peso gonadal a un nivel de significación de 0.05.

## Referencias

- [1] Carrasco, G. (1996) *Análisis de las Componentes Principales y sus Aplicaciones*. Tesis, Universidad de Panamá, Panamá.
- [2] Carrasco, G.; Mejía, A. (1997) “Modelo lineal general a través de las componentes principales”, *IX Semana de La Estadística*, Universidad de Panamá, Panamá.
- [3] Johnson, R.; Wichern, D. (1982) *Applied Multivariate Statistical Analysis*. 1st. ed. Prentice Hall Inc., New Jersey.
- [4] Jolliffe, I.T. (1986) *Principal Component Analysis*. 1st ed. Springer-Verlag, New York.
- [5] Mardia, K.V.; Kent J.T.; Bibby, J.M. (1979) *Multivariate Analysis*. 1st.ed. Academic-Press, London.
- [6] Pla, L. (1986) *Análisis Multivariado: Método de Componentes Principales*. O.E.A., Washington.

# APLICACIÓN DEL ANÁLISIS DE FACTORES EN EL ESTUDIO DE LOS MOLUSCOS DE LOS MANGLARES DE LA BAHÍA DE CHAME, PANAMÁ

DANIEL SÁNCHEZ \* – AURORA MEJÍA\* – MARILIN DIÉGUEZ\*

---

## Resumen

Este trabajo describe lo sucedido en diez estaciones establecidas para el estudio de los moluscos *Thais kioformis* y *Littorina spp.*, en la región de Punta Chame, Panamá, con aplicación del análisis de los factores y el método de componentes principales para la estimación de la cargas factoriales.

**Palabras clave:** Análisis en componentes principales, análisis factorial, regresión lineal, regresión regularizada.

## 1 Introducción

*“Los moluscos son indicadores de cambios ambientales, participan en procesos de biofiltración y depuración de las aguas, son fuentes de alimentos ricos en proteínas de bajo costo, mantienen una pesquería significativa y permiten, además, realizar interpretaciones paleontológicas”* (Diéguez et al., 1995.)

---

\*Departamento de Estadística, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Universidad de Panamá, Panamá

La investigación citada, de donde se obtuvieron los datos para el presente análisis, tenía como objetivo estudiar la distribución de los moluscos, bivaldos y gasterópodos, del área de la Ensenada de la Claridad en la localidad de Punta Chame, Panamá. Particularmente, la distribución espacial y temporal de las especies *Thais kioskormis* y *Littorina spp*, dos de las especies de mayor relevancia a nivel trófico en los sistemas de manglar, en diez estaciones situadas a lo largo y de ambos lados del canal principal de esta Ensenada. El uso del análisis de factores nos permitió examinar las variables que fueron observadas en cada estación de una manera objetiva, afín de deshacer toda influencia que hubiese entre las variables en estudio debido a las correlaciones que muchas veces ocurre entre ellas.

## 2 Materiales y método

Esta investigación de los moluscos estuvo diseñada de la siguiente manera : Se establecieron 10 estaciones de estudio a lo largo y de ambos lados del canal principal, como se muestra en la figura 1.

Figura 1: Distribución de las estaciones experimentales a lo largo del canal

Las variables que se observaron en cada estación fueron las siguientes:

1. Nivel (**Nivel**): Distancia medida a la cual se encontraba los individuos dentro de cada estación, en los arboles de mangle,

- Nivel 1: suelo a 0.5 m
  - Nivel 2: 0.5 - 1.0 m
  - Nivel 3: 1.0 - 1.5 m
2. Salinidad (**Sal**): Medida con un Refractómetro en las estaciones.
  3. Temperatura (**Temp**): Medida con un Psicrómetro en cada estación.
  4. Luz (**LUZ**): Apreciación visual.
  5. Algas (**ALGAS**): Número de algas por estación.
  6. Precipitación (**PREC**): Cantidad de lluvia en cada mes en Punta Chame.
  7. Número de Individuos (**NI**): Cantidad de individuos contados.
  8. Tamaño promedio (**TP**): Tamaño promedio de los individuos capturados.
  9. Especie (**ESPE**): Especies *Thais* y *Littorina*
- Otras variables consideradas para el estudio son:
10. Distancia (**DIST**): Medida desde la estación de muestreo hasta la costa o la playa.
  11. Altura (**ALT**): Distancia desde el fondo del canal hasta el suelo de cada estación.

Todos los análisis se realizaron para cada especie en particular dado que ellas presentaban características muy particulares, y por cada estación dado que las condiciones que se presentaron en cada una de ellas las distinguían.

Se realizó el Análisis de Factores estimando las cargas factoriales mediante el método de Componente Principales y rotación Varimax, aplicado a la matriz de correlación de las variables originales observadas en cada estación, para reducir el conjunto de variables a un conjunto menor de variables con la máxima variabilidad y no correlacionadas entre si. Este análisis se realizó utilizando el Programa SAS, procedimiento PROC FACTOR.

### 3 Resultados

#### 3.1 Estación No. 1

La tabla 1 muestra los valores promedio y la desviación estándar para cada variable en la estación No. 1.

Tabla 1: Media y desviación estándar de las variables medidas en la estación No. 1 en el estudio de los moluscos *Thais* y *Littorina*, Región Chame 1994.

VARIABLES	CÓDIGO	PROMEDIO	DESVIACIÓN ESTÁNDAR
Nivel	NIVEL	0.6527	0.4333
Luz	LUZ	0.0023	0.00129
Temperatura	TEMP	29.8333	2.4905
Salinidad	SAL	29.3333	1.6330
Algas	ALGAS	301.3333	89.76601
Precipitación	PREC	162.4867	140.1952

Se calculó la matriz de correlación con las seis variables utilizando los datos originales y se presentan en la tabla 2.

Tabla 2: Matriz de correlación de las variables observadas en la Estación No. 1 en el estudio de los moluscos *Thais* y *Littorina*, Región Chame 1994.

	NIVEL	LUZ	TEMP	SAL	ALGAS	PREC
NIVEL	1.0000	0.0634	-0.0681	-0.0003	0.0735	0.0104
LUZ		1.0000	0.1407	0.5873	0.2585	-0.4209
TEMP			1.0000	-0.3630	0.4947	-0.1742
SAL				1.0000	-0.5568	-0.1930
ALGAS					1.0000	-0.2018
PREC						1.0000

En la tabla 3 se presentan los valores propios de la matriz de correlación y la proporción total de variabilidad explicada por cada uno de los factores.

Se observa que el primer factor resume el 33.74% de la variación total y si tomamos hasta el tercer factor se resumen el 78.87% de la variación total. Esto significa que la combinación lineal de las variables originales representada por los tres primeros factores sintetiza el 78.87% de la variación total del conjunto de datos. Se seleccionaron 3 factores mediante el criterio que dice seleccionar aquellos cuyos valores propios sean mayores al promedio



Tabla 3: Valores propios y proporción de variabilidad explicada en el estudio de los moluscos *Thais* y *Littorina*, región Chame 1994.

Factores	Valor Propio	Proporción Absoluta	Proporción Acumulada
1	2.0245	0.3374	0.3374
2	1.6604	0.2767	0.6142
3	1.0473	0.1746	0.7887
4	0.8328	0.1388	0.9275
5	0.4349	0.0725	1.0000
6	0.0000	0.0000	1.0000

de los valores propio que para el caso de matriz de correlación son aquéllo mayores que uno. Con ello se acumula alrededor del 80% de la varianza total. En la tabla 4 se muestra los factores retenidos mediante el criterio de selección y luego de la rotación varimax.

Tabla 4: Cargas factoriales para los datos de los moluscos *Thais* y *Littorina* en la Estación No. 1, Región Chame 1994.

Variable	Matriz de factores originales			$h_i^2$	Matriz de factores rotación Varimax		
	$f_1$	$f_2$	$f_3$		$f_1$	$f_2$	$f_3$
NIVEL	-0.0062	0.0617	0.9204	0.8511	0.0021	-0.0012	0.9225
LUZ	-0.4275	0.8225	0.1542	0.8831	0.1206	0.9074	0.2126
TEMP	0.5528	0.6179	-0.2283	0.7395	0.8147	0.1974	-0.1917
SAL	-0.9152	0.1389	0.0715	0.8620	-0.6692	0.6374	0.0891
ALGAS	0.7345	0.4990	0.2099	0.8326	0.8809	-0.0305	0.2359
PREC	0.3986	-0.5744	0.2739	0.5638	-0.0144	-0.87142	0.2313

El primer factor muestra una alta correlación con las variables temperatura, algas y salinidad, mientras que el segundo factor se relaciona con las variables luz y precipitación, por otro lado el tercer factor se relaciona con la variable nivel:

**Factor 1** Temperatura, algas, salinidad.

**Factor 2** Luz, precipitación.

**Factor 3** Nivel.

### 3.1.1 Uso de los factores en el modelo de regresión lineal múltiple multivariada

Luego de obtenido los factores y los puntajes factoriales, con esta nueva información se realizó una regresión lineal multivariada usando los factores como regresores y las variables *Número de individuos* y *Tamaño promedio* como variables dependientes. Se consideraron las hipótesis:

Ho : No existe efecto lineal de los factores  $f_1, f_2$  y  $f_3$  sobre el número de individuo y el tamaño promedio para las especies *Thais* y *Littorina*.

H1 : Existe efecto lineal de los factores  $f_1, f_2$  y  $f_3$  sobre el número de individuos y el tamaño promedio para la especie *Thais* y *Littorina*.

Luego de realizado el análisis de regresión, se concluyó que para la especie *Thais* ninguno de los tres factores en forma individual influye linealmente sobre el número de individuos ni sobre el tamaño promedio de esta especie, ni tampoco en forma conjunta ( $p > 0.05$ ). Así, no se pudo establecer una ecuación de regresión para estas dos variables. El mismo resultado se obtuvo para la especie *Littorina*.

## 4 Resultados para las estaciones 2, 3, 4 y 5

Para las siguientes 4 estaciones establecidas a lo largo de este lado del canal se realizaron los mismos análisis.

### 4.1 Estación No. 2

Al realizar el Análisis Factorial, se retuvieron también 3 factores mediante el mismo criterio (cuyo valores propios sean mayor que el promedio) y además que hasta el tercer factor se acumulaba el 80.10% de la variación total. En la tabla 5 se muestran las cargas factoriales para la estación No. 2. El primer factor muestra una alta correlación con las variables temperatura, algas mientras que el segundo factor se relaciona con las variables nivel y precipitación, por otro lado el tercer factor se relaciona con la variables luz y salinidad:

**Factor 1** Temperatura, algas.

**Factor 2** Nivel, precipitación.

**Factor 3** Luz, salinidad.

En esta ocasión tampoco hubo efecto lineal de los nuevos factores sobre las variables número de individuos y tamaño promedio en la Estación No. 2.

Tabla 5: Cargas factoriales para los datos de los moluscos *Thais* y *Lattiforia* en la estación No. 2, Región Chame 1994.

Variable	Matriz de factores originales			$h_i^2$	Matriz de factores rotación Varimax		
	$f_1$	$f_2$	$f_3$		$f_1$	$f_2$	$f_3$
NIVEL	-0.06458	0.79761	0.34277	0.7578	-0.04073	0.84230	0.21617
LUZ	0.88941	-0.38462	0.10975	0.9510	0.5566	-0.0214	0.69242
TEMP	0.56401	0.17562	-0.43309	0.05365	0.7294	0.06597	0.01018
SAL	0.63731	0.04137	0.72807	0.93796	0.0444	0.14082	0.95717
ALGAS	0.81636	0.21654	-0.41773	0.88783	0.9202	0.09638	0.1783
PREC	-0.01367	0.84985	-0.11154	0.7349	0.18914	0.81519	-0.18592

#### 4.2 Restantes estaciones

Para la tercera, cuarta y quinta estaciones, fueron retenidos 3 factores en cada una. En la tabla 6 se presenta una síntesis de la asociación entre las variables y los factores, según cada estación.

Tabla 6: Asociación entre las variables y los factores para las estaciones 3, 4 y 5

Factores	Estación 3	Estación 4	Estación 5
1	Sal Algas Luz	Temp Luz Prec	Temp Luz Prec
2	Temp	Sal Algas	Sal Algas
3	Nivel Prec	Nivel	Nivel

Para la tercera estación, al medir el efecto lineal de los factores sobre el número de individuos para ambas especies, resultó que para la especie *Thais*, el factor 3 afecta linealmente el número de individuos de esta especie, pero en cuanto a su tamaño promedio ninguno de los 3 factores la afectan linealmente. De esta manera es posible establecer una ecuación de regresión para el número de individuos con base en los resultados anteriores para la especie *Thais* de la siguiente manera:

$$NI = 14.1144 + 7.243356f_3.$$

Para la cuarta estacin, al ver el efecto lineal de los nuevos factores sobre el número de individuos y el tamaño promedio de cada uno de las especies, resultó que el número de individuos de la especie *Littorina* está afectado por el tercer factor el cual está asociado con la variable Nivel. Se establece una ecuación de regresión de la siguiente manera:

$$NI = 6.020009 + 3.18814f_3.$$

Para la estación No.5 no se presentó ningún resultado significativo de efecto lineal de los nuevos factores con respecto al número de individuos, ni al tamaño promedio de ninguna de las dos especies.

## 5 Resultados para el lado izquierdo del canal

Veamos que sucedió con el lado izquierdo del canal, en el cual se encontraban establecidas las estaciones en orden descendente las estaciones 10,9,8,7 y 6 hasta la costa o playa. Siguiendo el mismo procedimiento descrito anteriormente, se retuvieron 3 factores para cada una de las estaciones. La tabla 7 presenta una síntesis de las asociaciones entre las variables y los factores para las estaciones 6, 7, 8, 9 y 10.

Tabla 7: Asociación entre las variables y los factores para las estaciones 6, 7, 8, 9 y 10

Factores	Estacin 6	Estacin 7	Estacin 8	Estacin 9	Estacin 10
1	Sal Luz Algas	Temp Luz Algas	Temp Algas	Temp Luz Sal Algas	Luz Prec Algas
2	Temp Prec	Sal Prec	Luz Prec Sal	Nivel	Sal Temp
3	Nivel	Nivel	Nivel	Prec	Nivel

### 5.1 Análisis de la dependencia

Para la estación No.10, al ver el efecto lineal de los nuevos factores sobre el número de individuos y el tamaño promedio en cada uno de las especies, resultó que el tamaño promedio de la especie *Thais* está afectado por el factor 2.

Para la novena estación, el tamaño promedio de la especie *Littorina* resultó afectado linealmente por el factor 2, el cual está asociado a la variable

Nivel, de esta manera podemos establecer la ecuación de regresión para el tamaño promedio así:

$$y = 1.783198 + 0.400488f_2$$

donde  $y$  es el tamaño promedio de la especie *Littorina*.

Para la estación No.8, el número tamaño promedio de la especie *Thais* resultó afectado linealmente por el factor 3, así la ecuación de regresión queda de la siguiente manera:

$$y = 2.431696 + 0.078317f_3$$

donde  $y$  es el tamaño promedio de la especie *Thais*. Por otro lado para la especie *Littorina*, resultó afectado tanto el tamaño promedio como el número de individuos. Para esta especie los factores 2 y 3 afectan linealmente el número de individuos de ella, por otro lado los factores 1 y 2 afectan el tamaño promedio. Luego de estos resultados podemos establecer las ecuaciones para cada caso:

- ecuación de predicción para el número de individuos:

$$y = 9.849569 - 4.911928f_2 + 4.3314f_3$$

- ecuación de predicción para el tamaño promedio

$$y = 1.343417 - 0.183028f_1 + 0.248430f_2$$

Para la estación No.7 no hubo efecto lineal de ninguno de factores sobre el número de individuos, ni sobre el tamaño promedio, para ambas especies.

Finalmente, la estación No.6 es la estación cercana a la costa o playa; aquí se observó que el número de individuos de la especie *Thais* está afectado por el tercer factor (Nivel) de manera lineal. Por otro lado para esta especie el tamaño promedio no resultó afectado por ninguno de los factores mencionados arriba. Para la especie *Littorina* se encontró que el número de individuos no está afectado por ninguno de los factores, no así el tamaño promedio de la especie, el cual resultó afectado por el factor 3 (Nivel).

La ecuación de regresión para el número de individuo para la especie *Thais* es:

$$y = 226.698809 - 18.409171f_3$$

La ecuación de regresión para el tamaño promedio para la especie *Littorina* es:

$$y = 1.7756573 + 0.117870f_3$$

## 6 Conclusiones

En el lado derecho del canal donde se encontraban las estaciones 1, 2, 3, 4 y 5 en este orden, solo se observó efecto lineal sobre el número de individuos de la especie *Thais* en la estación No.3 y en la estación No.4 en la especie *Littorina* respectivamente.

En el lado izquierdo del Canal donde se observaron las estaciones 10, 9, 8, 7 y 6 en este orden, se obtuvieron resultados significativos en las estaciones 10, 9, 8 y 6 respectivamente. En la estación 10 el tamaño promedio de la especie *Thais* resultó afectada linealmente por el factor 2 (Sal y Temperatura), en la estación 9 el tamaño promedio de la especie *Littorina* está afectado por el factor 2 (Nivel), en la estación 8 el tamaño promedio de la especie *Thais* resultó afectado linealmente por el factor 3 (Nivel), mientras que en la especie *Littorina* el número de individuos que afectado linealmente por los factores 2 (Luz, salinidad, precipitación) y factor 3 (Nivel), y el tamaño promedio resultó afectado por el factor 1 (Temperatura y algas) y por el factor 2 (Luz, salinidad y precipitación). Finalmente en la estación 6 ocurrió que el número de individuos de la especie *Thais* resultó afectado por el factor 3 (Nivel), mientras que en la especie *Littorina* lo que afectó linealmente el factor 3 fue el tamaño promedio de ella.

Al examinar si la distancia a la cual se encontraba las estaciones de la costa y las alturas de cada una de las estaciones, afectaba linealmente el número de individuos y su tamaño promedio de cada especie (*Thais* y *Littorina*), se encontró que para el lado izquierdo y para la especie *Thais* los siguientes resultados: La altura de las estaciones afectan el número de individuo de esta especie ( $p < 0.05$ ), mientras que la distancia y la altura afectan tanto individualmente ( $p < 0.05$ ) como en conjunto el tamaño promedio de esta especie. Al analizar las estaciones ubicadas en el lado izquierdo del canal se observó que ni las distancias, ni las alturas de las 5 estaciones afectan el número de individuos y su tamaño promedio.

El número de individuos de la especie *Littorina* en el lado derecho del canal (estaciones 1, 2, 3, 4 y 5) resultó afectado linealmente por las distancias hasta la costa, no así su tamaño promedio; el mismo resultado obtuvimos para el lado izquierdo del canal (estaciones 10, 9, 8, 7 y 6), donde se obtuvo un efecto significativo sobre el número de individuos de esta especie, no para el tamaño promedio.

La salinidad, que es uno de los factores con mayor influencia en la distribución de las especies en los ecosistemas costeros tropicales, estuvo asociado en muchas ocasiones al régimen pluvial (precipitación) y la cantidad de

algas. Por otro lado, se pudo comprobar la relación inversa que existe entre la salinidad y la temperatura en cada una de las estaciones.

## Referencias

- [1] Anderson, T.W. (1958) *An Introduction Multivariate Analysis*. John Wiley & Sons, New York.
- [2] Basilevsky, A. (1994) *Statistical Factor Analysis and Related Methods*. John Wiley & Sons, New York.
- [3] Carrasco, G. (1996) *Anlisis en Componentes Principales y sus Aplicaciones*. Tesis, Universidad de Panamá, Panamá.
- [4] Johnson, R.; Wichern (1982) *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Prentice-Hall, New York.
- [5] Mardia, K.V.; Kent, J.T.; Bibby, J.M. (1979) *Multivariate Analysis*. Academic Press, London.
- [6] Morrison, D.F. (1976) *Multivariate Statistical Methods*. McGraw-Hill, New York.
- [7] Norman, G.Y.; Streine, D. (1996) *Bioestadística*. Mosbby Doyma, Madrid.
- [8] SAS / STAT (1991) *Guide for Personal Computer, version 6.03*. SAS Institute Inc., N.C.
- [9] Diéguez, M.; Avilés, M.; De la Rosa, J. (1995) “Estudio de los moluscos de los manglares de la bahía de Chame”, en Actas del *Simposio de Ecosistemas de Manglares*, El Salvador, PRADEPESCA.

XI SIMPOSIO INTERNACIONAL DE MÉTODOS MATEMÁTICOS APLICADOS A LAS CIENCIAS  
W. Castillo & J. Trejos (eds.), SANTA CLARA, COSTA RICA 11-13 FEBRERO 1998  
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA - INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA: 68-74

## ASPECTOS COGNOSCITIVOS DE LA PERCEPCIÓN DE INSEGURIDAD EN LOS COSTARRICENSES\*

MAURICIO MOLINA DELGADO<sup>†</sup>

### 1 Introducción

Las *Teorías del procesamiento de la información* (TPI) han demostrado su gran utilidad en el apoyo al estudio de la psicología humana, específicamente ha sido patente su aplicación en el análisis de fenómenos relacionados propiamente con la cognición (Anderson, 1990 a). Sin embargo, el mismo enfoque de la TPI ha sido trasladado a otros campos de la Psicología como es el área de la Psicología Social (Devine, 1989).

Por otra parte, siendo el tema de la seguridad ciudadana uno de los más importantes dentro de las Ciencias Sociales costarricenses, existen algunos trabajos dedicados al estudio de la percepción de inseguridad dentro de la población del país (Fournier, proyecto de investigación vigente). Sin embargo, ninguno de estos estudios se ha apoyado en el estudio de los procesos de asimilación de la información para dar explicaciones sobre la formación de dichas percepciones de inseguridad.

Una pregunta formulada en el marco de la TPI, pertinente desde la perspectiva de estos procesos de asimilación de la información, es de qué modo los sujetos elaboran los datos que reciben de la realidad social. En particular surge la duda de si los sujetos elaboran a partir del número bruto de hechos tales como la cantidad de homicidios que se presentan en cierto período, o bien si lo hacen respecto a la importancia relativa de estos hechos. En términos matemáticos, la pregunta puede ser traducida de la siguiente forma: utilizan los sujetos la información del número absoluto de hechos de violencia en la elaboración de sus percepciones sobre la seguridad o lo hacen en término de las tasas correspondientes. La TPI provee de algunas evidencias que sugieren que probablemente los sujetos fundamentan sus percepciones y opiniones en las cantidades absolutas. En términos

\*Agradezco la colaboración del Sr. Luis Roberto Haugh de la CID-Gallup por su gran gentileza y atención, al permitir el uso de la información sobre seguridad recogida en las investigaciones de dicha empresa.

<sup>†</sup>Instituto de Investigaciones Psicológicas y Escuela de Estadística, Universidad de Costa Rica, 2060 San José, Costa Rica.



de Anderson (1990 b) la conducta humana tiene un carácter adaptativo respecto al medio y con una probabilidad alta recurre a información que da buenos resultados ; de este modo, la información respecto al número de homicidios puede ser un parámetro útil para juzgar la situación de la inseguridad, sin embargo, la limitada capacidad de procesamiento de la información le impediría al ser humano utilizar parámetros más exactos (como serían los números relativos). De este modo, aun siendo el número de homicidios un buen indicador, en ciertas circunstancias podría provocar juicios erróneos ; de hecho, es fácil mostrar que esta situación puede llevar a una especie de ilusión que se explica por el crecimiento de la población más que por el crecimiento de la violencia y la inseguridad.

Al respecto, conviene presentar algunos ejemplos : supóngase que los índices de criminalidad actuales se mantienen constantes de aquí al año 2000, es decir, que la probabilidad de que un individuo sufra de algún hecho de criminalidad (digamos de un homicidio) es constante durante ese período. Dado el crecimiento de la población que se presentará durante el mismo, y siguiendo las proyecciones del CELADE y el Ministerio de planificación y política económica de Costa Rica (1988) es de esperar que para el año 2000 el número absoluto de homicidios se incremente en un 10%, no por causa de incrementos en la violencia sino de incrementos en el población. De este modo, los 184 homicidios reportados en 1995 (Poder Judicial, 1995) se convertirían cinco años más tarde en 203, de no existir cambios en los índices de criminalidad. Este cambio se traduce en que cada mes del año 2000 habría en promedio 1.58 homicidios más que en 1995, a pesar de que las condiciones de seguridad serían idénticas.

Se puede verificar fácilmente que las tasas de homicidios entre 1990 y 1996 se han incrementado ligeramente, pero aun si se supone que esto no fuera así, para el año 2000 el número de homicidios se habría incrementado en casi un 25%.

Compárese además la tasa de homicidios para los años 1990 y 1995, la cual ha pasado de 4.61 homicidios por cada 10000 habitantes en 1990 a 5.45 por 10000 habitantes en 1995. De este modo, se puede ver que el incremento corresponde a un 18% ; pero si se juzga el número absoluto de homicidios en el mismo período, éste ha aumentado en un 32% (139 homicidios en 1990 y 184 en 1995). Esta discrepancia puede ser explicada por el cambio en el tamaño de la población, el cual corresponde según proyecciones del CELADE (1988) a un 11.92%.

La importancia de estas cifras está lejos de ser puramente teórica. La percepción de aumentos en la criminalidad y la inseguridad está asociada con patrones de comportamiento que en sí mismos son peligrosos, tales como la tendencia de la población a armarse.

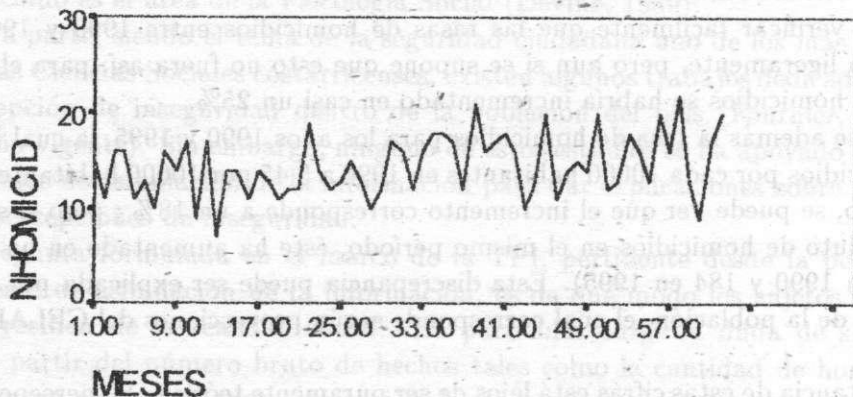
Por otra parte, las diferencias entre una percepción fundamentada en las cifras relativas y una percepción fundamentada en las cifras absolutas, tiene también una interpretación en relación a los medios por los que se recibe la información. Específicamente, es de esperarse que la información que se recibe por los medios de información de masas sea procesada en forma de números absolutos. La razón de ésto es que si, por ejemplo, la cantidad de homicidios aumenta entre 1995 y el año 2000 únicamente por efecto del incremento de la población, en este último año ocurrirán como se mencionó anteriormente, mensualmente 1.58 homicidios más que cinco años atrás. Estos 1.58 homicidios de más se verán reflejados en un incremento del tiempo que dedicarán los noticieros de radio y televisión y del espacio que dedicarán los periódicos, a cubrir noticias sobre crímenes. En otras palabras, si

otros factores se mantienen iguales, para el año 2000 los medios de comunicación deberán incrementar en un 10.33% el tiempo y espacio dedicados a cubrir noticias sobre crímenes. Existe más probabilidad de que medios de comunicación informales produzcan información en términos relativos. La esperanza matemática del número de crímenes que puede llegar a conocer en un tiempo dado un sujeto, por medio de su círculo social es efectivamente función de la tasa de homicidios y no de la cantidad absoluta de los mismos.

Finalmente, debe agregarse que existe una tendencia generalizada a reportar cifras absolutas en lugar de las respectivas tasas, lo cual evidentemente contribuye a la situación que se ha venido señalando en cuanto a la percepción de inseguridad. Tómese como ejemplo el documento *Homicidios atendidos por el organismo de investigación judicial (1980-1984)*, en el cual no se reporta un solo número relativo.

Probablemente la discusión precedente ayude a explicar las discrepancias que se pueden observar en los Gráficos No. 1 y No. 2. En el primero puede observarse que la tasa mensual de homicidios en Costa Rica ha estado fluctuando desde noviembre de 1991 hasta noviembre de 1996, sin que se observe un aumento importante (Gráfico No. 1). Por otra parte, el gráfico No. 2 muestra que a diferencia de lo que sucede con la criminalidad, la percepción de inseguridad de los costarricenses ha sufrido un aumento importante desde julio de 1994.

Gráfico 1: Homicidios por mes, Costa Rica, Nov. 91 - Dic. 96



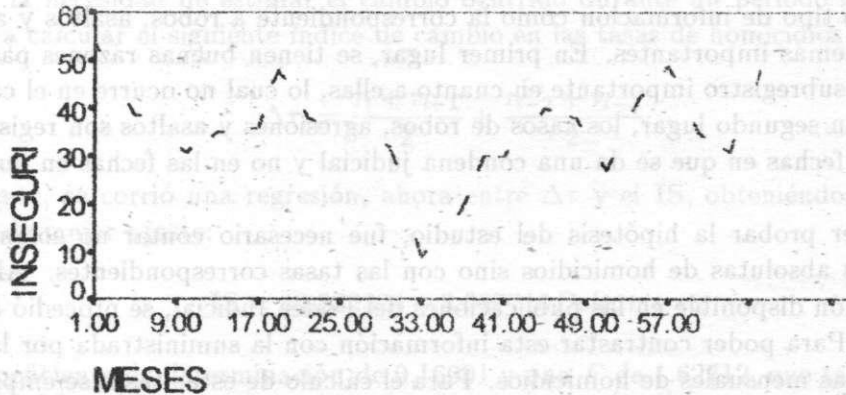
La discrepancia entre estos dos patrones es precisamente lo que, a partir de la TPI, se pretende explicar en este estudio.

## 2 Objetivos

El propósito de este estudio es analizar la forma en que los costarricenses han asimilado la información sobre la criminalidad y el modo en que esta información ha contribuido a la formación de una percepción sobre la inseguridad.

Específicamente se trabajó con la hipótesis de que las opiniones y percepciones sobre la inseguridad responden más a los incrementos en la cantidad absoluta de crímenes que a los cambios que en términos relativos se han presentado, de modo que debería existir

Gráfico 2: Percepción de inseguridad, Costa Rica, 1991 - 1996



una mayor asociación estadística positiva entre el número absoluto de homicidios y la percepción de inseguridad, que entre esta última y la tasa de homicidios.

### 3 Metodología

Desde el año 1991 la Consultoría Interdisciplinaria de Desarrollo (CID) viene realizando en sus estudios de opinión la siguiente pregunta (1996):

*En cuanto a la seguridad personal de los costarricenses contra crímenes, robos y asaltos en los últimos 4 meses, ¿cree Ud. que en la actualidad se tiene más, igual o menos seguridad? (CID, Opinión pública No. 63, Abril 1996)*

En total, entre noviembre de 1991 y abril de 1997, se cuenta con una serie de 20 estudios en los que se incluyó esta pregunta. Cada uno de estos estudios corresponde a una encuesta por muestreo con un error máximo de 3 puntos porcentuales y un 95% de confianza.

Con estos datos se construyó un **índice del clima de inseguridad (IS)**, el cual consiste de restar el porcentaje de sujetos en la muestra que manifiestan que existía más seguridad, al porcentaje que consideraba que había menos seguridad:

$$IS = \% \text{ menos seguridad} - \% \text{ más seguridad.} \quad (1)$$

Por otra parte, y con el fin de encontrar un indicador objetivo del clima de inseguridad para ser contrastado con la percepción de los ciudadanos, se utilizaron los datos sobre cantidad de homicidios mensuales atendidos por el Organismo de Investigación Judicial de Costa Rica para el mismo período, según aparecen en el folleto *Homicidios atendidos por el Organismo de Investigación Judicial (1980- 1994)* (Poder Judicial, 1995). Esta información fue completada con las cifras correspondientes al período 1995-1996, las cuales no han sido publicadas pero que se encuentran tabuladas en la Sección de Estadística del Departamento de Planificación del OIJ; sin embargo, dicho departamento aún no cuenta

con los datos para 1997. La información sobre los homicidios es solamente una de las posibles fuentes mediante las cuales los ciudadanos perciben el clima de inseguridad, sin embargo, otro tipo de información como la correspondiente a robos, asaltos y agresiones muestra problemas importantes. En primer lugar, se tienen buenas razones para pensar que existe un subregistro importante en cuanto a ellas, lo cual no ocurre en el caso de los homicidios. En segundo lugar, los casos de robos, agresiones y asaltos son registrados de acuerdo a las fechas en que se da una condena judicial y no en las fechas en que suceden los hechos.

Para poder probar la hipótesis del estudio, fue necesario contar no solamente con las cantidades absolutas de homicidios sino con las tasas correspondientes. Al no estar esta información disponible en las publicaciones del Poder Judicial, se procedió a calcular dichas tasas. Para poder contrastar esta información con la suministrada por la CID, se calcularon tasas mensuales de homicidios. Para el cálculo de estas tasas se emplearon las proyecciones de población del CELADE (1988).

A pesar de que se cuenta con datos para el período comprendido entre noviembre de 1991 y octubre de 1996, se analizó únicamente la información a partir de julio de 1994. Esta decisión provoca el inconveniente de que se cuenta únicamente con estimaciones de la inseguridad percibida para 10 meses; sin embargo existen buenas razones para esto. En primer lugar, es a partir de esta fecha cuando se empieza a dar un fenómeno creciente de sentimiento de inseguridad en la población costarricense (ver Gráfico 2). Puede además observarse que el año 1994 se caracteriza por mostrar los niveles de mayor sentimiento de seguridad en el período, fenómeno que es atribuible al hecho de ser un año electoral, lo cual distorsiona los patrones entre la percepción y la situación objetiva de la seguridad.

#### 4 Resultados

Dado el hecho de que la pregunta utilizada por la CID constituye una medición del cambio en la seguridad que los sujetos perciben en los últimos cuatro meses, se utilizó un **índice del cambio real en la cantidad de homicidios** ( $\Delta H$ ), mediante el procedimiento de restar al número de homicidios reportados en el mes de realización de la encuesta y en el mes anterior, aquellos que se dieron dos y tres meses antes.

$$\Delta H = (H_t + H_{t-1}) - (H_{t-2} + H_{t-3}). \quad (2)$$

Posteriormente se corrió una regresión entre  $\Delta H$  (Variable independiente) y el índice de clima de inseguridad, **IS** (Variable dependiente). La ecuación de la recta de mejor ajuste resultó ser la siguiente:

$$IS = 31.769674\Delta H + 0.651628 + e_i, \quad (3)$$

con un coeficiente de determinación de 0.20372 y una  $F$  de 2.04676 que no resultó estadísticamente significativa ( $p = 0.1904$ ).

Un procedimiento similar se llevó a cabo utilizando las tasas de homicidios, de modo que la tasa de homicidios para el mes  $t$  ( $\tau_t$ ) fue calculada del siguiente modo:

$$\tau_t = H_t/N_t, \quad (4)$$

donde  $N_t$  es la población estimada para principios del mes  $t$ .

Dada la necesidad de estimar el cambio ocurrido durante un período de 4 meses, se procedió a calcular el siguiente índice de cambio en las tasas de homicidios ( $\Delta\tau_t$ ):

$$\Delta\tau_t = \frac{\tau_t + \tau_{t-1}}{2} + \frac{\tau_{t-2} + \tau_{t-3}}{2}. \quad (5)$$

Nuevamente, se corrió una regresión, ahora entre  $\Delta\tau$  y el IS, obteniéndose la siguiente ecuación de mejor ajuste:

$$IS = 30.822324 + 3.037715\Delta\tau + e_i, \quad (6)$$

con un coeficiente de determinación de 0.16901 y una  $F$  de 1.62712, que tampoco resultó estadísticamente significativa ( $p = 0.2379$ ).

A pesar de que los modelos (3) y (6) no resultan significativos, al incluirse la variable tiempo (en meses), el aporte de las variables  $\Delta\tau$  y  $\Delta H$  sí lo es al 5% de significancia:

$$IS = -14.07001 + 0.634907\Delta H + 0.985872t + e_i \quad (7)$$

$$t = 2.4970 \quad t = 4.3220$$

$$p = 0.0412 \quad p = 0.0035$$

$$F = 12.6236 \quad p = 0.0048$$

$$IS = -19.654537 + 3.819693\Delta\tau + 1.079558t + u_i \quad (8)$$

$$t = 3.5320 \quad t = 5.6950$$

$$p = 0.0096 \quad p = 0.0007$$

$$F = 20.22736 \quad p = 0.0012$$

Para el modelo (7) el coeficiente de determinación resultó de 0.78293 y para el (8) de 0.85249.

Se podría pensar que si se incluyen las dos variables independientes que miden el nivel de criminalidad ( $\Delta H$  y  $\Delta\tau$ ) en la misma ecuación de regresión, el ajuste debería ser alto, sin embargo no es posible analizar este modelo porque al estar muy correlacionadas ambas variables existe un grave problema de multicolinealidad. Una forma de solventar este problema, sería incluyendo como variable independiente, junto con la tasa de homicidios, al tamaño de la población ( $N$ ). Este modelo debería ser altamente significativo ya que incluye un componente que mide el aumento real de la criminalidad (las tasas de homicidios) y otro que mide la ilusión que produce el aumento de la población. Una posible objeción a este enfoque, es el hecho de que el incremento de la población puede ser causante de hacinamiento, pobreza y otros problemas sociales que desemboque en cambios reales sobre las tasas de homicidios; si esto fuera así sería imposible utilizarla como indicador de la ilusión mencionada. Sin embargo, para el período estudiado, la correlación entre las tasas de homicidio y el tamaño de la población es más bien negativa ( $R = -0.4074$ ) de modo que la criminalidad real no se ha visto afectada (al menos en el período) por el tamaño de la población. En cambio, al estimar el modelo para explicar la inseguridad objetiva

de la población se obtiene una explicación del 85.88%, siendo el efecto de ambas variables significativo al 0.1% :

$$IS = -635.791673 + 3.754904\Delta\tau + 0.000195N + u_i \quad (9)$$

$$t = 3.553 \quad t = 5.847$$

$$p = 0.0093 \quad p = 0.00060$$

$$F = 21.27956 \quad p = 0.0011$$

## 5 Conclusión

Si bien los resultados no son suficientemente contundentes, sí parecen presentar un panorama suficientemente explícito, en el que parece confirmarse la hipótesis inicial. Es así como se obtiene un coeficiente de determinación mayor al emplear el número absoluto de homicidios ( $R^2 = 0.20372$ ) que al considerarse las tasas de homicidios ( $R^2 = 0.16901$ ). Al utilizar las ecuaciones (7) y (8) da la impresión de que esta tendencia se revierte, siendo más importante el papel de las tasas de homicidios, sin embargo esto probablemente se explica por el hecho de que la otra variable independiente (tiempo) tiene una correlación más alta con el número absoluto de homicidios. Lo que sí resulta claro es que parte de la percepción de inseguridad presente en el costarricense durante el período estudiado, se explica por el crecimiento de la población y la ilusión que éste provoca mediante el mencionado efecto de los cantidades absolutas de homicidios, y no por aumentos reales en la criminalidad. Los análisis realizados no bastan para afirmar la magnitud de cada uno de estos efectos, de modo que este aspecto podría ser estudiado más adelante mediante análisis con modelos de Análisis de Trayectoria o modelos de LISREL ; pero efectivamente se puede observar la existencia de una ilusión que resulta en la magnificación del sentimiento de inseguridad de los costarricenses, y que eventualmente puede desembocar en comportamientos peligrosos por parte de la población.

## Bibliografía

- [1] Anderson, J. R. (1990) *Cognitive Psychology and its Applications*. New York: Freeman.
- [2] CID-GALLUP (1996) *Opinión Pública-Costa Rica*, No. 63. San José, Costa Rica.
- [3] Devine, P.G. (1989) "Stereotypes and prejudice: their automatic and controlled components", *Journal of Personality and Social Psychology* 56(1): 5-18.
- [4] Fournier, M. "Actitudes y normas culturales frente a la violencia en ciudades seleccionadas de la región de las Américas", Proyecto de investigación vigente en el *Instituto de Investigaciones Psicológicas (IIP)* de la Universidad de Costa Rica.
- [5] MIDEPLAN, CELADE, DGEC (1988) *Costa Rica : Estimaciones y proyecciones regionales de población (Por sexo y grupos de edades) 1975-2000*. San José, Costa Rica.
- [6] Poder Judicial, Dpto. de Planificación, Sección de Estadística (1995) "Homicidios atendidos por el Organismo de Investigación Judicial (1980-1994)". San José, Costa Rica.

## MODELO DE REGRESIÓN LINEAL NORMAL EN LAS ESTIMACIONES POBLACIONALES A NIVEL CANTONAL

EDWIN A. CHAVES ESQUIVEL \*

### Resumen

Este artículo discute el uso de dos modelos de regresión normal en la obtención de estimaciones poblacionales a nivel cantonal. Para su aplicación se utilizan variables ligadas con el cambio poblacional llamadas: indicadores sintomáticos. Para ello se emplean series de datos administrativos que se recolectan regularmente en el país.

Para validar los resultados, se efectúan estimaciones cantonales de población para 1984, y se compararon con su valor censal y con las publicadas por la Dirección General de Estadística y Censos (DGEC), que asumen un crecimiento natural de la población.

Con el uso de los indicadores padrón electoral y nacimientos el error promedio fue de un 4% una mejora de 8,5 puntos porcentuales con respecto a las estimaciones de la DGEC.

Se evidencia que, ante la carencia de datos censales, el uso de estas técnicas constituyen una buena opción que puede ser tomada en cuenta en las estimaciones de población.

**Palabras clave:** regresión lineal normal, razón correlación, tasa correlación, indicadores sintomáticos, error porcentual.

### 1 Introducción

La necesidad de considerar los movimientos poblacionales dentro del proceso de la planificación de un pueblo, convierte a las estimaciones del tamaño y composición de la población en una herramienta útil para el diagnóstico de necesidades locales, así como para estimar la oferta y demanda en la formulación de proyectos, tanto a nivel público como privado (Rincón, 1990).

Estimaciones poblacionales eficientes a nivel de áreas administrativas menores se tienen únicamente para los años censales. Para el período intercensal, el cual frecuentemente

\*Escuela de Estadística, Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica y Escuela de Matemática, Universidad Nacional, Heredia, Costa Rica; e-mail: eachaves@cariari.ucr.ac.cr

supera los diez años, quienes deben tomar decisiones con base en el número de habitantes, no cuentan con información confiable. El problema se agrava en los momentos actuales donde trece años después del último censo de población y vivienda, no se ha decidido en qué año será el próximo y posiblemente en lo que queda del siglo no se cuente con esta información.

El método tradicional de estimación consiste en suponer un crecimiento natural de la población; sin embargo, al no considerar el movimiento migratorio conduce a una subestimación en aquellas zonas de atracción poblacional y a una sobreestimación en las de expulsión. El principal problema en tratar los movimientos migratorios, dentro del proceso de estimación, consiste en la carencia de registros, con el detalle y la calidad necesarios. Pero además, las áreas administrativas menores, presentan mucha inestabilidad de un período a otro en sus datos vitales lo que hace compleja su dinámica demográfica (Rincón, 1990).

El presente artículo propone la utilización de modelos de regresión lineal normal para estimar la población a nivel cantonal en Costa Rica. Para la aplicación de estos modelos, se recurre a los indicadores sintomáticos, los que consisten en variables auxiliares ligadas al crecimiento poblacional y pueden ser utilizadas para medir sus cambios (Chaves, 1997). Cuatro fuentes de datos administrativos son consideradas para este fin: Electores inscritos en el padrón electoral, nacimientos, defunciones y matrícula escolar en I y II ciclo. Razones de cambio en el comportamiento de estos indicadores a nivel cantonal son utilizados como variables predictoras en la aplicación de los modelos de regresión, donde la variable dependiente consiste en las respectivas razones de cambio poblacionales. De este modo, se aplican dos técnicas de predicción que han dado resultados aceptables en países desarrollados.

Para determinar la calidad de los resultados, se efectúan estimaciones poblacionales para 1984 (año del último censo), las cuales se comparan contra su valor censal. Además se analizan las mejoras presentadas en las estimaciones con respecto a aquellas que suponen un modelo de crecimiento natural de la población.

## 2 Metodología

Los métodos considerados producen estimaciones que requieren conocer el tamaño poblacional de un área mayor que las comprende. Por tal razón, las estimaciones obtenidas deben prorratearse, para que su conjunto reproduzca la población total de esa área (Chaves, 1997).

### 2.1 Método de razón correlación

Esta técnica fue introducida por Schmitt y Crosetti en 1954. En su forma básica, consiste en distribuir la población de un área mayor en sus áreas menores constituyentes y ha demostrado ser uno de los métodos más exactos en la estimación de población para el período poscensal (Mandell y Tayman, 1982; Fenney, Hibbs y Guillaspy, 1995).

Este modelo requiere información de la población de un área mayor y sus áreas menores constituyentes, y los datos de uno o más indicadores sintomáticos. El supuesto básico del



método considera una relación lineal entre las razones de cambio de las proporciones poblacionales que representa cada área menor y las razones de cambio de las proporciones de los indicadores, entre dos años censales. Considerando, además, que los cambios en el tiempo de esta relación afectan uniformemente todas las áreas. El modelo puede formularse como:

$$Y_u = \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j X_{u,j} + \varepsilon_u \quad (1)$$

donde  $Y_u = \frac{P_1(u)}{P_1(M)} / \frac{P_0(u)}{P_0(M)}$ ,  $X_{u,j} = \frac{S_{j,1}(u)}{S_{j,1}(M)} / \frac{S_{j,0}(u)}{S_{j,0}(M)}$  y  $\varepsilon_u$  es el error asociado a la predicción de  $Y_u$  para cada área menor  $u$  y cada indicador sintomático  $j$ ; además

- $P_i(u)$  es la población correspondiente a cada área menor  $u$  en el año censal  $i$
- $P_i(M)$  es la población correspondiente al área mayor  $M$  en el año censal  $i$
- $S_{j,i}(u)$  es el valor del indicador sintomático  $j$  en cada área menor  $u$  en el año censal  $i$
- $S_{j,i}(M)$  es el valor del indicador sintomático para el área mayor  $M$  en el año censal  $i$
- $\beta_j$  ( $j = 0, 1, \dots, k$ ) corresponde a los coeficientes del modelo de regresión

Los  $\beta_j$  se pueden estimar, considerando la ecuación (1) como un modelo de regresión normal y aplicando el método de máxima verosimilitud, o también mediante el método de mínimos cuadrados (Mood, 1955; DeGroot, 1975). Una vez estimados los coeficientes, el modelo se utiliza para estimar las poblaciones de las diferentes áreas menores,  $t$  años después del censo. Para el caso discutido aquí, las áreas menores  $u$  son los cantones y el área mayor  $M$  es el total del país.

## 2.2 Método de tasa correlación

Se le crítica a la técnica de Razón Correlación una inconsistencia en su lógica interna, ya que los coeficientes del modelo se obtienen tomando como referencia el tiempo entre los censos y, sin embargo, las estimaciones se efectúan en tiempos diferentes del período base, el cual es, por lo general, menor al tiempo entre los censos. Esto puede afectar la estabilidad natural de los coeficientes y las estimaciones producidas (Mandell y Tayman, 1982; OHare, 1980). Una solución inmediata consiste en construir un modelo que considere a la fracción de razón del cambio anual, en vez de la fracción utilizada antes.

Se ha propuesto una transformación al método de Razón Correlación, llamada Tasa Correlación, que se basa en una aproximación exponencial de cambio, y que se realiza tomando el logaritmo natural de cada razón y dividiéndola entre el tiempo transcurrido entre los censos utilizados como referencia (Swanson y Tedrow, 1984). Melec y Katzoff, dieron evidencia que esta transformación logarítmica reduce la autocorrelación espacial, por lo que se puede esperar mayor precisión en las estimaciones (Malec y Katzoff, 1983).

Formalmente, el modelo se puede expresar por:

$$Y_u^* = \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j X_{u,j}^* + \varepsilon_u \quad (2)$$

donde:  $Y_u^* = \frac{\ln(Y_u)}{m}$  y  $X_{u,j}^* = \frac{\ln(X_{u,j})}{m}$ . Aquí,  $Y_u, X_{u,j}$  y  $\varepsilon_u$  están definidos tal como se indicó para la técnica de Razón Correlación y  $m$  es el intervalo de tiempo transcurrido entre los censos.

### 2.3 Supuestos básicos de los modelos de regresión lineal normal

Todo modelo de regresión lineal normal, sea simple o múltiple, debe ser sometido a una verificación del cumplimiento de los supuestos básicos. Para los modelos planteados en las ecuaciones (1) y (2), la variable dependiente  $Y_u$  (o  $Y_u^*$ ) se supone normalmente distribuida con variancia  $\sigma^2$  y media  $\beta_0 + \beta_1 X_{u,1} + \beta_2 X_{u,2} + \dots + \beta_k X_{u,k}$ ,  $u = 0, 1, 2, \dots, n$  (o con  $X_{u,j}^*$  en vez de  $X_{u,j}$  para todo  $j = 0, 1, 2, \dots, k$ ), donde  $n$  representa el número de cantones considerados en el estudio. De acuerdo con lo anterior estos supuestos básicos se pueden resumir por:

1. Los errores  $\varepsilon_u$  se distribuyen normalmente con media cero y variancia  $\sigma^2$ . Esto quiere decir que  $E(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$  si  $i \neq j$  y que  $E(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \sigma^2$  si  $i = j$ . Si la distribución de los errores no es normal se dice que existe un problema de *normalidad* y si la variancia de ellos no es constante se dice que existen problemas de *heteroscedasticidad*.
2. Los errores  $\varepsilon_u$  no deben estar correlacionados con los  $X_u$ , es decir  $Cov(\varepsilon_u, X_u) = 0$ .
3. No deben existir relaciones lineales entre las  $X_u$ . Si este supuesto se incumple se dice que existen problemas de *múlticolinealidad*. El modelo solo incluye aquellas variables que no son función de otras variables ya incluidas en él (Johnson y Wichern, 1988).

### 2.4 Indicadores sintomáticos disponibles

En un estudio sobre el uso de los indicadores sintomáticos en Costa Rica, se determinaron cuatro fuentes de datos que mostraron estar fuertemente correlacionados con el tamaño poblacional de diferentes tipos de áreas administrativas, entre ellas los cantones. Estas fuentes de información son: Matrícula escolar en I y II ciclos proporcionada por el Ministerio de Educación Pública, nacimientos y defunciones suministrados por la Dirección General de Estadística y Censos y número de electores inscritos en el padrón electoral según los registros del Tribunal Supremo de Elecciones. Cada una de estas fuentes de datos también fue sometida a un proceso de revisión y evaluación con el fin de que no existan inconsistencias en ellas (Chaves, 1997). Debido a las características de los métodos de estimación, se necesita que los datos utilizados estén disponibles a partir del censo de población de 1963.

### 2.5 Valoración de las estimaciones

La mejor manera de evaluar la bondad de las estimaciones producidas, consiste en compararlas con sus valores reales. Pero, como este valor es desconocido, se efectúa la comparación contra los valores censales. Para ello, se deben obtener estimaciones poblacionales para 1984, año del último censo poblacional. Dichas estimaciones se realizan a través de los dos modelos, con el uso de cada uno de los indicadores sintomáticos y combinaciones de ellos.

Para medir la calidad de las estimaciones producidas, se calcula su error porcentual (EP) o porcentaje de desviación respecto al valor censal. Esta medida viene dada por la

fórmula:

$$EP = \frac{\text{Pobl. estimada} - \text{Pobl. censal}}{\text{Pobl. censal}} \times 100 \quad (3)$$

Un error porcentual positivo indica que la estimación sobreestima la población censal, mientras que un valor negativo indica una subestimación.

Puesto que las estimaciones son prorrateadas para ajustar la población total del país, el error porcentual promedio toma valores cercanos a cero. Por tal razón, para analizar el comportamiento global de las estimaciones, se requiere calcular el valor absoluto del error porcentual (*AEP*). De este modo, el promedio de los *AEP* es una buena medida para evaluar la calidad de un conjunto de estimaciones, y un buen parámetro de comparación, de los resultados de dos o más grupos de ellas.

### 2.5.1 Precisión de las estimaciones

Para calificar una estimación como buena o mala, primero se debe considerar que esta información censal está sujeta a errores de cobertura. Para el último censo, este error fue estimado en aproximadamente un 6% consecuencia, no parece lógico que a las estimaciones poblacionales de áreas menores se les exigiera una extrema calidad. Por esta razón, se consideran como buenas aquellas estimaciones que presentan errores menores al 5%, "aceptables" las que estén entre 5 y 10% y "malas" las que sobrepasaron el 10%.

## 3 Resultados

### 3.1 Estimaciones para 1984

Tal como lo muestran las ecuaciones (1) y (2), para poder utilizar las técnicas Razón Correlación y Tasa Correlación en la obtención de estimaciones poblacionales para 1984, es necesario utilizar la información correspondiente a los años censales 1963 y 1973. Este hecho obliga a trabajar con los 68 cantones que existían en el país en 1963. Por esta razón, la información correspondiente a los cantones creados después de este año, se incluyó en el lugar de procedencia de cada uno.

En primer lugar interesa determinar la correlación existente entre las distintas variables consideradas en el estudio. Para los 68 cantones se determina su razón de cambio con respecto a la proporción que representa cada cantón en el total del país, tanto para la población como para cada indicador sintomático en el período 63-73. El Cuadro 1 presenta la matriz de correlaciones entre estas variables.

Se aprecia una fuerte correlación positiva entre los indicadores sintomáticos y la población, especialmente con el padrón electoral y con los nacimientos. Con la excepción de la matrícula escolar con las defunciones, todas las demás parejas de indicadores sintomáticos están fuertemente correlacionadas, por tal motivo debe tenerse cuidado al utilizar en los modelos de regresión más de un indicador sintomático a la vez.

El Cuadro 2 muestra el comportamiento de los errores producidos en las estimaciones, para los cuatro indicadores sintomáticos considerados y para las combinaciones de ellos que presentaron la mayor precisión.

Cuadro 1: Matriz de correlación de las razones de cambio en las proporciones del tamaño poblacional y de cuatro indicadores sintomáticos, a nivel cantonal, Período 63-73

Variable	Pob	P Elec	Nac	M Esc	Def
Población	1.00				
Padr Electoral	0.87	1.00			
Nacimientos	0.86	0.85	1.00		
Matr Escolar	0.79	0.77	0.81	1.00	
Defunciones	0.73	0.69	0.72	0.41	1.00

En cuanto a los modelos simples, el padrón electoral y los nacimientos dan los mejores resultados. Al utilizar el padrón electoral el error producido es de aproximadamente 5% lo que puede considerarse como una buena aproximación. Los nacimientos muestran también buenos resultados. Las estimaciones obtenidas de la matrícula escolar y de las defunciones, producen grandes errores. Por otro lado, al combinar el padrón electoral con los nacimientos se obtienen buenos resultados en las estimaciones, de modo que el 72% los cantones presentan valores de *AEP* inferiores al 5% aproximadamente de 4% matrícula escolar junto con el padrón electoral y los nacimientos se reduce el promedio de *AEP* en 0.3 puntos porcentuales y para el caso de Tasa Correlación reduce el número de cantones con *AEP* mayores al 10%.

Por otra parte, el Cuadro 3 presenta los valores de  $R^2$  para los seis modelos del Cuadro 2, y la significancia de los coeficientes de cada indicador, mediante la prueba estadística *t*. También muestra el valor del estadístico *F* como resultado de la aplicación de un análisis de variancia a cada modelo, el cual tiene una distribución *F* de Fisher con ( $j, n - j - 1$ ) grados de libertad, donde *j* es el número de variables predictoras utilizadas (Johnson y Wichern, 1988).

Si se analiza el valor de *F*, todos los modelos resultan significativos estadísticamente. También muestran un alto  $R^2$  y coeficientes significativos al nivel del 5% de la matrícula escolar, lo que indica que las razones de cambio de los indicadores sintomáticos explican un alto porcentaje de la variabilidad de la razón de cambio poblacional. Debido a la alta correlación que existe entre los indicadores sintomáticos, el aporte de la matrícula escolar al modelo con padrón electoral y nacimientos es mínimo, el  $R^2$  aumenta únicamente en un punto porcentual y su coeficiente no es significativo a un nivel del 5%.

### 3.2 Verificación de supuestos básicos de los modelos

Siempre que se trabaje con modelos de regresión es necesario analizar el cumplimiento de los supuestos del modelo. Un buen método para juzgar el cumplimiento de los supuestos de linealidad, como el de variancia constante, consiste en representar gráficamente los residuos contra los valores predichos. Si los supuestos se cumplen, no debe existir ninguna relación entre los residuos y los valores predichos. Los residuos deben distribuirse aleatoria y uniformemente a lo largo de una franja horizontal centrada en cero (Hernández y Bolaños, 1993). El Gráfico 1 muestra los diagramas de residuos contra los valores predichos para dos de los modelos que mostraron mayor precisión en las estimaciones.

Cuadro 2: Comparación del valor absoluto en el error porcentual y del error porcentual en las estimaciones poblacionales a nivel cantonal por indicador sintomático según método utilizado, año 1984

	Método	
	Razón Correlación	Tasa Correlación
<b>Modelo 1</b>		
<b>Defunciones</b>		
Promedio de AEP	10.5	10.4
Desviación estandar de los EP	12.8	13.0
Valor Máximo de los AEP	26.8	30.2
Porcentaje de AEP inf a 5%	29.4	27.9
Porcentaje de AEP sup a 10%	36.8	44.1
<b>Modelo 2</b>		
<b>Matrícula Escolar</b>		
Promedio de los AEP	9.5	9.6
Desviación estandar de los EP	11.5	11.6
Valor Máximo e los AEP	31.7	31.3
Porcentaje de AEP inf a 5%	32.4	36.8
Porcentaje de AEP sup a 10%	41.2	42.6
<b>Modelo 3</b>		
<b>Nacimientos</b>		
Promedio de AEP	6.7	6.4
Desviación estandar de los AEP	7.9	7.9
Valor Máximo de los EP	21.9	21.3
Porcentaje de AEP inf a 5%	51.5	51.5
Porcentaje de AEP sup a 10%	20.6	23.5
<b>Modelo 4</b>		
<b>Padrón Electoral</b>		
Promedio de AEP	5.0	4.9
Desviación Estandar e los EP	6.4	6.3
Valor Máximo de los AEP	18.5	19.4
Porcentaje de AEP inf a 5%	58.8	55.9
Porcentaje de AEP sup a 10%	13.2	11.8
<b>Modelo 5</b>		
<b>Padrón electoral y Nacimientos</b>		
Promedio de AEP	4.1	4.0
Desviación Estandar de los EP	4.9	4.8
Valor Máximo de los AEP	12.1	12.5
Porcentaje de AEP inf a 5%	72.1	72.1
Porcentaje de AEP sup a 10%	2.9	2.9
<b>Modelo 6</b>		
<b>Padrón electoral, Nacimientos y Matrícula Escolar</b>		
Promedio de AEP	3.8	3.8
Desviación Estandar de los EP	4.7	4.6
Valor Máximo de los AEP	13.5	14.2
Porcentaje de AEP inf a 5%	72.1	72.1
Porcentaje de AEP sup 10%	2.9	1.5

Cuadro 3: Valor de  $R^2$  y significancia dada por la prueba  $t$  y  $F$  para los seis modelos de regresión múltiple presentados en el Cuadro 2.

Indicadores sintomáticos incluidos	Razón correlación			Tasa correlación		
	Valor de $F$	$R^2$	Signif. de $t$	Valor de $F$	$R^2$	Signif. de $t$
<b>Modelo 1</b>	77.4	0.54		93.5	0.58	
Deunciones			0.00			0.00
<b>Modelo 2</b>	112.5	0.63		108.1	0.62	
Matrícula Escolar			0.00			0.00
<b>Modelo 3</b>	193.0	0.75		188.4	0.74	
Nacimientos			0.00			0.00
<b>Modelo 4</b>	209.5	0.76		190.4	0.74	
Padrón Electoral			0.00			0.00
<b>Modelo 5</b>	127.2	0.81		141.0	0.81	
Padrón Electoral			0.00			0.00
Nacimientos			0.00			0.00
<b>Modelo 6</b>	98.4	0.82		99.4	0.82	
Padrón Electoral			0.00			0.00
Nacimientos			0.00			0.00
Matrícula Escolar			0.07			0.06

No se aprecian tendencias que sugieran algún tipo de patrón sistemático entre los residuos y los valores predichos, principalmente con el método de Tasa Correlación, por lo que se puede considerar como válido el supuesto de linealidad. Tampoco se observan incrementos o disminuciones en los residuos que sugieran problemas de heterocedasticidad (o variancia no constante); sin embargo, los residuos correspondientes a las técnicas de Tasa Correlación muestran un mejor patrón.

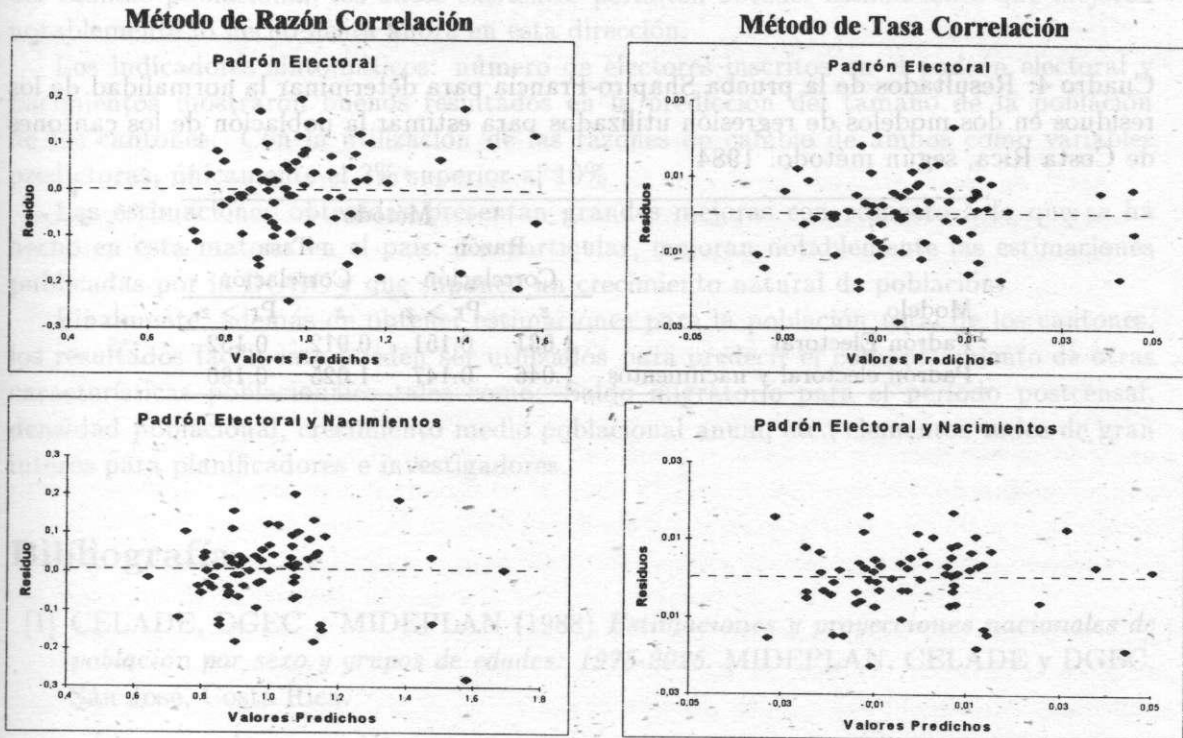
Con respecto al supuesto de independencia estadística de los residuos, el número de datos es grande si se compara con el número de variables utilizadas, por lo que la independencia puede ser ignorada (Hernández y Bolaños, 1993). Para examinar la normalidad de los residuos, el Cuadro 4 proporciona los resultados de la prueba Shapiro-Francia la que permite determinar si un conjunto de datos sigue una distribución normal (Shapiro y Francia, 1972; Stata Press, 1995).

Aunque los residuos no pasaron la prueba de normalidad, los valores de " $Pr > z$ " son bajos, menores a 0.20, por lo que se puede suponer que su comportamiento no dista mucho de la curva normal.

### 3.3 Comparación con estimaciones obtenidas mediante el método de crecimiento natural

Existe una fuerte demanda de estimaciones poblacionales que suponen un crecimiento natural de la población, específicamente las producidas por la DGEC. Por esta razón, se decidió comparar las estimaciones de la DGEC en 1984 con los resultados obtenidos con los modelos de regresión. El Cuadro 5 muestra un resumen del comportamiento de los errores producidos al comparar dichas estimaciones con la información censal, para los

Gráfico 1: Gráficos de residuos correspondientes a dos modelos de regresión utilizados para estimar la población de los cantones de Costa Rica en 1984, según método utilizado.



diferentes cantones.

Al analizar los resultados, se pueden observar grandes diferencias en precisión a favor de los cálculos hechos con los modelos de regresión. Analizando únicamente el valor promedio de *AEP*, se obtuvo una mejora en más de ocho puntos porcentuales. Esto señala claramente que, al menos para períodos que se alejen notoriamente del año censal, las estimaciones producidas con estos modelos superan notablemente aquellas que suponen un crecimiento natural de la población.

#### 4 Discusión

La investigación efectuada deja en evidencia la utilidad en la aplicación de los modelos de regresión lineal normal para estimar la población total de los cantones de Costa Rica. Se ha demostrado que, con la ayuda de una apropiada información sintomática, las técnicas Razón Correlación y Tasa Correlación permiten realizar estimaciones que, al me-

Cuadro 4: Resultados de la prueba Shapiro-Francia para determinar la normalidad de los residuos en dos modelos de regresión utilizados para estimar la población de los cantones de Costa Rica, según método. 1984

Modelo	Método			
	Razón		Tasa	
	Correlación	Pr > z	Correlación	Pr > z
Padrón Electoral	1.031	0.151	0.912	0.152
Padrón electoral y nacimientos	1.046	0.147	1.025	0.180

Cuadro 5: Comparación del valor absoluto en el error porcentual de las estimaciones poblacionales a nivel cantonal, suponiendo un crecimiento natural, 1984

	Estimaciones bajo supuesto de Crec. Nat.	Estimaciones con Modelos de regresión*
Promedio de AEP	12.4	4.0
Valor Máximo de AEP	60.7	12.5
Porc. de AEP inf a 5%	28.4	72.1
Porc. de AEP sup a 10%	44.4	2.9

\*Los resultados presentados corresponden a la aplicación del método de Tasa Correlación con el padrón electoral y los nacimientos.



nos para 1984, dan excelentes resultados en cuanto a su precisión y al cumplimiento de los principales supuestos matemáticos que los sustentan. Aunque no se contó con una gran cantidad de indicadores sintomáticos que puedan ser utilizados como variables predictoras del tamaño poblacional, los datos existentes permiten obtener estimaciones que mejoran notablemente lo hecho hasta ahora en esta dirección.

Los indicadores sintomáticos: número de electores inscritos en el padrón electoral y nacimientos mostraron buenos resultados en la predicción del tamaño de la población de los cantones. Con la utilización de las razones de cambio de ambos como variables predictoras, únicamente el 3% superior al 10%

Las estimaciones obtenidas presentan grandes mejoras con respecto a lo que se ha hecho en esta materia en el país. En particular, mejoran notablemente las estimaciones publicadas por la DGECC y que suponen un crecimiento natural de población.

Finalmente, además de obtener estimaciones para la población total de los cantones, los resultados fácilmente pueden ser utilizados para predecir el comportamiento de otras características poblacionales tales como: Saldo migratorio para el período postcensal, densidad poblacional, crecimiento medio poblacional anual, etc.; elementos todos de gran interés para planificadores e investigadores.

## Bibliografía

- [1] CELADE, DGECC y MIDEPLAN (1988) *Estimaciones y proyecciones nacionales de población por sexo y grupos de edades: 1975-2025*. MIDEPLAN, CELADE y DGECC. San José, Costa Rica.
- [2] Chaves, E. (1997) *Indicadores Sintomáticos en las Estimaciones Poblacionales para Áreas Menores. Costa Rica*. Tesis de Maestría, Universidad de Costa Rica. San José.
- [3] DeGroot, M. H. (1975) *Probability and Statistics*. Addison-Wesley, California.
- [4] DGECC. *Población de la República de Costa Rica, por provincias, cantones y distritos*. San José, Costa Rica. (Serie periódica de publicaciones).
- [5] Feeney, D.; Hibbs, J.; Gillaspay, T. (1995) "Ratio-correlation method", en *Basic Methods for Preparing Small-Area Population Estimate* Rives, Norfleet et al. (pag. 118-136). Applied Population Laboratory, Department of Rural Sociology, College of Agricultural and Life Sciences. University of Wisconsin-Madison/Extension.
- [6] Johnson, R.; Wichern, D. (1988). *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Segunda edición. Printice Hall, New Jersey.
- [7] Malec, D.; Katzoff, J. (1983) "Application of some common spatial models to population data", *Annual Meeting of the American Statistical Association*, Toronto, Ontario.
- [8] Mandell, M.; Tayman, J. (1982) "Measuring temporal stability in regression models of population estimation", *Demography* 19: 135-146.

- [9] Mood, A. M. (1955) *Introducción a la Teoría de la Estadística*. Edit. Aguilar, Madrid.
- [10] O'Hare, W. (1980) "A note on the use of regression methods in population estimates", *Demography* 17: 341-343.
- [11] Rincón, M. (1990) *Teoría y Métodos para la Preparación de Estimaciones y Proyecciones de Población*. CELADE, San José.
- [12] Serow, W.; Rives; Norfleet (1995) "Small Area Analysis: Assessing the State of the Art.", en *Basic Methods for Prepar Small- Population Estimates* Rives, Norfleet et al. (eds.) (pág. 1-9). Applied Population Laboratory, Department of Rural Sociology, College of Agricultural and Life Sciences. University of Wisconsin-Madison/Extension.
- [13] Swanson, D.; Tedrow, L. (1984) "Improving the Measurement of Temporal Change in Regression Models Used for County Population Estimates", *Demography* 21: 373-381.

## Bibliografía

- [1] CELADE-DGBC y MIDEPLAN (1988) Estimaciones y proyecciones nacionales de población por sexo y grupos de edades: 1975-2025. MIDEPLAN, CELADE y DGBC. San José, Costa Rica.
- [2] Chaves, E. (1997) Indicadores estadísticos en las estimaciones poblacionales para Acajutla, Costa Rica. Tesis de Maestría. Universidad de Costa Rica, San José.
- [3] DeGroot, M. H. (1985) *Probability and Statistics*. Addison-Wesley, California.
- [4] DGBC, Población de la República de Costa Rica por provincias, cantones y distritos. San José, Costa Rica. (Series periódica de publicaciones).
- [5] Feeney, D. (1995) "Ratio-correlation method", en *Basic Methods for Prepar Small- Area Population Estimates* Rives, Norfleet et al. (eds.) (pág. 118-126). Applied Population Laboratory, Department of Rural Sociology, College of Agricultural and Life Sciences, University of Wisconsin-Madison/Extension.
- [6] Johnson, R. W. (1988) *Applied Mathematical Statistical Analysis*. Segunda edición. Prentice Hall, New Jersey.
- [7] Malow, D.; Katzoff, J. (1983) "Application of some common spatial models to population data", Annual Meeting of the American Statistical Association, Toronto, Ontario.
- [8] Masdell, M. T. (1982) "Measuring temporal stability in regression models of population estimation", *Demography* 19: 135-146.

## APLICACIÓN DE REGRESIÓN CENSURADA POR MEDIO DEL ALGORITMO EM EN DATOS DEL CULTIVO DEL TEMPATE

FRANCISCO DANILO PADILLA CONTRERAS \*– ANA CRISTINA ROSTRN MOLINA \*

---

Este trabajo forma parte de las investigaciones del Proyecto Tempate (*Jatropha curcas*), el cual persigue dar respuesta al pas para el desarrollo de una fuente alternativa de hidrocarburos. La planta es monoica, con flores masculinas y femeninas en la misma inflorescencia. El estudio se realiz en la finca El Jcaro, 30 plantas fueron seleccionadas el 30 de abril de 1994, para un estudio detallado de su fenologa reproductiva. Las plantas fueron marcadas, y se llev un conteo diario de flores y frutos, precipitacin, evaporacin y humedad de suelo (esta ltima una vez por semana) [1].

Las relaciones entre las variables biolgicas son frecuentemente discontinuas, éstas pueden analizarse mediante regresin censurada. En un modelo censurado, todos los puntos por encima o por debajo de un cierto umbral, son los que pueden ser observados [5]. Ajustaremos un modelo de regresin lineal, donde la variable respuesta sern las flores femeninas y la variable independiente sern las flores masculinas; el modelo ser de regresin lineal censurada utilizando el algoritmo EM (*Expectation Maximization*). El modelo es:

$$y_i \sim N(\alpha + \beta x, \sigma^2),$$

---

\*Departamento de Estadstica y Matemticas, Universidad Nacional Autnoma de Nicaragua-Len, Len, Nicaragua

esto es, un modelo de regresión lineal simple normal homocedástico. Pero solo podemos observar los valores de  $y_i$  no negativos, un valor de  $y_i = 0$  se considera dato censurado, esto es, el verdadero valor debe ser negativo, pero no lo podemos observar [2].

El algoritmo EM consiste en construir el logaritmo de la función de verosimilitud para datos completos (suponiendo que todos los datos son perfectamente conocidos) [2]. Encontrando una primera solución inicial del vector de parámetros por medio de los estimadores de mínimos cuadrados ordinarios, excluyendo las censuras. Hacer una nueva estimación con los datos completos, se obtienen nuevos parámetros, y los valores  $y_i$  censurados son estimados. El mecanismo de convergencia o de parada se determina cuando el valor de

$$(\alpha - \hat{\alpha})^2 + (\beta - \hat{\beta})^2 + (\sigma - \hat{\sigma})^2$$

es más pequeño que un  $\varepsilon$  dado; en tal caso, el algoritmo se detiene.

En vista de que este algoritmo no está incorporado en los paquetes estadísticos usuales, nos vimos en la necesidad de programarlo. La programación se hizo en lenguaje C (compilador QuickC, versión 2.50).

Al realizar los análisis de regresión no encontramos diferencias sustanciales en los parámetros de regresión clásica y regresión censurada, pero los coeficientes de correlación del modelo censurado son mayores, indicando una mejor explicación del modelo en la regresión.

## Referencias

- [1] Aker, C. (no publicado)
- [2] Bermudes, J. (no publicado)
- [3] Kmenta, J. (1971) *Elements of Econometrics*. MacMillan Publ. Co.: 197–268.
- [4] Lezama, L. (s.f.) “Comportamiento de dos variedades de Tempate *Jatropha curcas* L) en el Pacífico de Nicaragua 1992-1993, pg. 87.
- [5] Schmid, B. et al. (1994) *The American Naturalist*, March: 494–507.
- [6] Sánchez, D. P. (s.f.) *Estadística, Modelos y Métodos*: 41–275.
- [7] Padilla, F.D.; Rostrán, A.C. (1997) *Aplicación de Regresión Censurada por medio del Algoritmo EM en Datos del Cultivo del Tempate*. Tesis para optar al Título de Magister Scientiae, Universidad de Valencia.

ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE DOS EXPERIMENTOS  
EN VARIEDADES DE ARROZ. USO DEL DISEÑO  
DE PARCELAS DIVIDIDAS Y SU COMBINADO.  
ESTACIÓN EXPERIMENTAL “VISTA FLORIDA”  
(OCTUBRE 93 – JUNIO 94)

SYLVIA FALLA OLAVARRA \*

---

**Resumen**

La investigación considera las ventajas de utilizar las variedades semiprecoces de arroz, bajo la forma de siembra directa, lo que ocasiona un considerable ahorro de tiempo para compensar el atraso al sembrar en pocas semitardas.

El trabajo permite determinar la densidad óptima de siembra de tal manera que permita a la planta el suficiente espacio para su mejor reproducción, lo cual redundará en mayores rendimientos de grano.

Además, teniendo como base la presente investigación, los asistentes, agricultores e investigadores, se podrán beneficiar con estudios similares que incluyan variedades semiprecoces, pocas semitardas y densidades de siembra que sean apropiadas de la zona. Los asistentes también podrán tener los argumentos necesarios para hacer repeticiones en el tiempo y en el espacio, según los objetivos de sus propias investigaciones.

---

\*Av. Los Quipus 140, La Victoria (Lado Panamericana), Chiclayo, Per

Para ello, haremos uso de mtodos estadsticos que nos permitan contrastar hiptesis planteadas, como por ejemplo el Diseo de Parcelas Divididas, con arreglo factorial  $3 \times 4$ , presentando as el Anlisis Combinado correspondiente para Parcelas Divididas.

## BUILDING LOCAL CONFIDENCE INTERVALS FOR THE VARIOGRAM THROUGH BLOCK-BOOTSTRAP

ANGELA DIBLASI \*– ADRIAN BOWMAN †

---

If the observations are independent the bootstrap methodology is quite useful to calculate the empirical distribution of a statistic based on these observations. However a similar statement cannot be made for dependent observations. The independent and identically distributed re-sampling scheme associated with the method fails to capture the underlying dependence in the joint distribution of the observations.

For this reason, some efforts have been made to extent this methodology to the case of dependent observations. One technique which deals with the estimation of distributions under the assumption of dependence is the “block-bootstrap”.

A statistic of interest in the context of spatial processes, and particularly in their applications to geostatistical data, is an estimator of the variogram. When the underlying distribution is Gaussian, some efforts have been made in the literature to approximate the distribution of the classical estimator of the variogram. However, these approximations usually assume normality and are based on large sample sizes.

Standard errors bars are sometimes displayed on top of estimated values of the variogram. There is a danger of misinterpreting these, because the underlying points are not independent. A motivation for the block-bootstrap is to attempt to represent the variability in the estimator of the variogram more accurately.

---

\*Universidad Nacional de Cuyo, Facultad de Ciencias Ecoómicas, Centro Universitario, 5500 Mendoza, Argentina

†University Gardens, Mathematic Building, Glasgow G12 OQA, United Kingdom.

An algorithm based on a subsample or window due to Hall and Jing (1994) is explored here, to assess its effectiveness in calculating confidence intervals for the variogram.

A Gaussian second order stationary and isotropic process with a specific variogram is generated. Local confidence intervals for the semi-variogram are calculated via this block-bootstrap approach and the coverage accuracy is calculated for some particular variogram models. These confidence intervals are also compared with those based on the approximate distribution for the classical estimator given by Baczkowski & Mardia (1987) under the assumption of normality.

**Keywords:** resampling, block-bootstrap, empirical distribution, variogram, percentage coverage.



## ESTIMACIÓN DE LA DENSIDAD PARA CAMPOS ALEATORIOS

MICHEL CARBON \*

---

### 1 Introducción

Una generalización natural de la teoría de procesos es la de los campos aleatorios. En lugar de indexar el proceso por un  $t$  que recorre  $\mathbf{Z}$ , se indexa por un  $t$  que recorre  $\mathbf{Z}^N$ , donde  $N \geq 1$ . Esto permite, por ejemplo, estudiar fenómenos que varían tanto temporalmente como espacialmente (por ejemplo, la toma de una secuencia de fotografías aéreas). El caso  $N = 1$  nos da de nuevo, por supuesto, el marco clásico de los procesos. Los campos aleatorios aunque ya un poco estudiados, falta mucho por explorar. Por supuesto, nuestro objetivo es aportar una contribución a la utilización de técnicas de estimación espacial no paramétricas para los casos donde los enfoques para familias de modelos paramétricos pueden no ser confiables.

Como base de estudio de este tema se puede consultar sobre campos aleatorios, por ejemplo, Neaderhouser (1980), Bolthausen (1982), Guyon et Richardson (1984), Guyon (1987) y Nakhapetyan (1987).

Notemos  $\mathbf{Z}^N$  la malla de puntos del espacio euclideo de dimensión  $N$  ( $N \geq 1$ ). Consideremos un campo aleatorio estrictamente estacionario  $\{X_{\mathbf{n}}\}$

---

\*Laboratoire de Statistique, Université de Haute-Bretagne, 6 Avenue Gaston Berger, 35043 Rennes Cedex, Francia

indexado por  $\mathbf{n}$  en  $\mathbf{Z}^N$  y definido sobre un espacio probabilizado  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ . Un punto  $\mathbf{n}$  de  $\mathbf{Z}^N$  será llamado un ‘sitio’.

En el lenguaje de tratamiento de imagen, cada pixel puede ser asimilado a la observación de un  $X_{\mathbf{n}}$  sobre el sitio  $\mathbf{n}$ . Se sabe perfectamente que este pixel en el sitio  $\mathbf{n}$  es muy poco dependiente de los valores de los pixeles alejados espacial y temporalmente. Sobre el tema del análisis de imágenes se puede consultar, por ejemplo, Geman et Geman (1984) o Kashyap et Chellapa (1983).

En el lenguaje de la epidemiología (ver Yakowitz *et al* (1990-1992)), se puede considerar cada lugar geográfico en el tiempo  $t$  como un sitio  $\mathbf{n}$ , y el valor  $X_{\mathbf{n}}$  como el número de infecciones en este lugar en ese instante. Aquí también un lugar muy alejado espacial y temporalmente será muy poco dependiente de  $X_{\mathbf{n}}$ . De donde la idea natural de generalizar los conceptos de mezcla a los campos aleatorios.

## 2 Definición de una $\alpha$ -mezcla para campos aleatorios

Hemos tratado de generalizar los conceptos usuales de  $\alpha$ -mezcla al contexto de los campos aleatorios.

Para dos conjuntos finitos de sitios  $S$  y  $S'$ , las  $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{B}(S) = \mathcal{B}(X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in S)$  y  $\mathcal{B}(S') = \mathcal{B}(X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in S')$  son generados por las variables aleatorias  $X_{\mathbf{n}}$  con  $\mathbf{n}$  recorriendo respectivamente  $S$  y  $S'$ . Notemos  $\text{dist}(S, S')$  la distancia euclídeana entre  $S$  y  $S'$ . Supondremos en lo sucesivo que  $X_{\mathbf{n}}$  satisface la condición de  $\alpha$ -mezcla siguiente: existe una función  $\varphi(t)$  decreciente a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ , tal que cualesquiera que sean  $S, S' \in \mathbf{Z}^N$ ,

$$\begin{aligned} \alpha(\mathcal{B}(S), \mathcal{B}(S')) &= \sup \{ |P(AB) - P(A)P(B)| \mid A \in \mathcal{B}(S), B \in \mathcal{B}(S') \} \\ &\leq h(\text{Card}(S), \text{Card}(S')) \varphi(\text{dist}(S, S')), \end{aligned}$$

donde  $\text{Card}(S)$  designa el cardinal de  $S$ , y donde  $h$  es una función simétrica positiva, creciente con relación a cada variable. Se supondrá además que  $h$  verifica sea

$$h(n, m) \leq \min \{m, n\} \quad (2)$$

o

$$h(n, m) \leq C(n + m + 1)^{\tilde{k}} \quad (3)$$

con  $\tilde{k} \geq 1$  y  $C > 0$ . Si  $h \equiv 1$  entonces  $X_{\mathbf{n}}$  se llama fuertemente mezclado.

Se mencionó que Withers (1981) dio condiciones para que un proceso lineal sea fuertemente mezclado. En el caso  $N = 1$ , muchos procesos y series temporales son fuertemente mezclados. Además bajo ciertas hipótesis débiles, los procesos autorregresivos y más generalmente los procesos bilineales son fuertemente mezclados con los coeficientes de mezcla decrecientes exponencialmente (ver también Pham et Tran (1985), y Pham (1987)). Guyon (1987) mostró que los resultados de Withers se extienden a los campos aleatorios  $X_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{Z}^N} g_{\mathbf{j}} \mathbf{Z}_{\mathbf{n}-\mathbf{j}}$  bajo ciertas condiciones para los  $g_{\mathbf{j}}$  y los  $\mathbf{Z}_{\mathbf{n}-\mathbf{j}}$ .

Las condiciones (2) y (3) son las mismas que las condiciones de mezcla utilizadas por Neaderhouser (1980) o Takahata (1983) y son más débiles que la condición de mezcla uniforme utilizada por Nakhapetyan (1987).

### 3 Estimador del núcleo de la densidad

Sea  $I_{\mathbf{n}}$  una región rectangular definida por  $I_{\mathbf{n}} = \{\mathbf{i} : \mathbf{i} \in \mathbf{Z}^N, 1 \leq i_k \leq n_k, k = 1, \dots, N\}$ . Se supone que se ha observado  $\{X_{\mathbf{n}}\}$  sobre  $I_{\mathbf{n}}$ . Se supone también que  $X_{\mathbf{n}}$  toma sus valores en  $\mathbb{R}^d$  y tiene por densidad  $f$ .

Se escribirá  $\mathbf{n} \rightarrow \infty$  si

$$\min \{n_k\} \rightarrow \infty \text{ y } |n_j/n_k| < C \quad (4)$$

para una constante  $C$  tal que  $0 < C < \infty$ ,  $1 \leq j, k \leq N$ . Se pondrá también  $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{n}_1 \cdots \mathbf{n}_N$ . Todos los límites serán tomados cuando  $\mathbf{n} \rightarrow \infty$  en el sentido anterior;  $x$  es un punto de  $\mathbb{R}^d$ .

El estimador del núcleo  $f_{\mathbf{n}}$  de  $f(x)$  es definido por:

$$f_{\mathbf{n}}(x) = (\hat{\mathbf{n}} b^d)^{-1} \sum_{k=1}^N \sum_{j_k=1}^{n_k} K((x - X_{\mathbf{j}})/b), \quad (5)$$

donde  $b \equiv b_{\mathbf{n}}$  es una sucesión de anchos de ventana tendiendo a cero cuando  $\mathbf{n}$  tiende hacia infinito.

Tran (1990) halló condiciones apropiadas sobre el ancho de la ventana  $b_{\mathbf{n}}$  para que  $f_{\mathbf{n}}(x)$  sea asintóticamente gaussiana. Las condiciones sobre  $b_{\mathbf{n}}$  son explícitas, más restrictivas que en el caso de independencia y dependientes

ntimamente del grado de la dependencia tratada. Más recientemente Tran et Yakowitz (1992) estudiaron el comportamiento de estimadores de  $f$  del tipo método de los más próximos vecinos.

## 4 Convergencia $L_1$ del estimador del núcleo

Nuestros trabajos se refieren al estudio de la convergencia  $L_1$  del estimador del núcleo definido en (5). Devroye and Györfi (1985) probaron que el espacio  $L_1$  es el espacio natural de las densidades.

Sea  $J_n$  la distancia  $L_1$  definida por  $J_n = \int |f_n(x) - f(x)| dx$  donde la integral es tomada sobre todo el espacio. Nuestro principal objetivo ha sido buscar condiciones débiles para asegurar que  $J_n$  converge en probabilidad a cero. En el caso de independencia ( $N = 1$ ),  $J_n$  tiende a cero bajo condiciones simples (ver Devroye (1983)). La distancia  $L_1$  ha sido usada por Chan et Tran (1992) en el problema de prueba de una dependencia serial.

Hemos supuesto las condiciones siguientes:

**Hipótesis 1.** El núcleo  $K$  es absolutamente integrable con  $\int K(z) dz = 1$  y

$$\int \|z\| |K(z)| dz < \infty$$

(aquí  $\|z\|$  designa la norma euclídea usual).

**Hipótesis 2.** La densidad  $f$  de  $X_i$  es acotada.

**Hipótesis 3.** Se supone que  $\sum_{i=1}^{\infty} i^{N-1} (\varphi(i))^{\frac{\delta}{(2+\delta)}} < \infty$  con  $\delta > 0$ .

**Hipótesis 4.** El ancho de la ventana  $b$  decrece a cero tan lentamente que

$$\hat{n} b^{\frac{2d(1+\delta)}{(2+\delta)}} (\log \hat{n})^{-1} \rightarrow \infty.$$

Consideremos una partición de  $\mathbb{R}^d$  en conjuntos  $B$  que sean  $d$  productos cartesianos de intervalos de la forma  $(\frac{(i-1)b}{\gamma}, \frac{ib}{\gamma})$ , donde  $i$  es un entero y  $\gamma$  es un número positivo.

La partición será llamada  $\Psi$ .

El método de bloques utilizado no es más que una generalización del usado por Tran (1990). Una técnica más delicada de descomposición en bloques ha sido empleada. Se define:

$$\Delta = \hat{n}^{-1} b^{-d} 1_B(X_i), \quad (6)$$

donde  $B$  es un elemento de la partición  $\Psi$ . Sea

$$p = p(\mathbf{n}) = \left[ \left( \widehat{\mathbf{n}} b^d / (\eta \log \widehat{\mathbf{n}}) \right)^{1/N} \right]. \quad (7)$$

Sin pérdida de generalidad se supone que  $n_i = 2pq_i$  para  $1 \leq i \leq N$ . Las variables  $\Delta_i$  pueden ser agrupadas en  $2^N q_1 \times q_2 \times \cdots \times q_N$  bloques cúbicos de lado  $p$ . Pongamos:

$$S_{\mathbf{n}} = \sum_{k=1}^N \sum_{i_k=1}^{n_k} \Delta_i. \quad (8)$$

Definiendo sucesivamente:

$$U(1, \mathbf{n}, \mathbf{j}) = \sum_{k=1}^N \sum_{i_k=2j_k p+1}^{(2j_k+1)p} \Delta_i, \quad (9)$$

$$U(2, \mathbf{n}, \mathbf{j}) = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i_k=2j_k p+1}^{(2j_k+1)p} \sum_{i_N=(2j_N+1)p+1}^{2(j_N+1)p} \Delta_i, \quad (10)$$

$$U(3, \mathbf{n}, \mathbf{j}) = \sum_{k=1}^{N-2} \sum_{i_k=2j_k p+1}^{(2j_k+1)p} \sum_{i_{N-1}=(2j_{N-1}+1)p+1}^{2(j_{N-1}+1)p} \sum_{i_N=2j_N p+1}^{(2j_N+1)p} \Delta_i, \quad (11)$$

$$U(4, \mathbf{n}, \mathbf{j}) = \sum_{k=1}^{N-2} \sum_{i_k=2j_k p+1}^{(2j_k+1)p} \sum_{i_{N-1}=(2j_{N-1}+1)p+1}^{2(j_{N-1}+1)p} \sum_{i_N=(2j_N+1)p+1}^{2(j_N+1)p} \Delta_i, \quad (12)$$

etc. Observemos que:

$$U(2^{N-1}, \mathbf{n}, \mathbf{j}) = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i_k=(2j_k+1)p+1}^{2(j_k+1)p} \sum_{i_N=2j_N p+1}^{(2j_N+1)p} \Delta_i.$$

Finalmente:

$$U(2^N, \mathbf{n}, \mathbf{j}) = \sum_{k=1}^N \sum_{i_k=(2j_k+1)p+1}^{2(j_k+1)p} \Delta_i.$$

Para todo entero  $1 \leq i \leq 2^N$ , se define

$$T(\mathbf{n}, \mathbf{i}) = \sum_{k=1}^N \sum_{j_k=0}^{q_k-1} U(\mathbf{i}, \mathbf{n}, \mathbf{j})$$

Entonces, claramente se tiene:

$$S_{\mathbf{n}} = \sum_{i=1}^{2^N} T(\mathbf{n}, \mathbf{i}). \quad (13)$$

El resultado principal es entonces el siguiente. Bajo las hipótesis 1 a 4, si  $b$  tiende a cero suficientemente lento como para que

$$b^{-d(2+\tau)} (\log \hat{\mathbf{n}}) (h(\hat{\mathbf{n}}, p) \varphi(p))^{2\tau} \rightarrow 0$$

entonces

$$J_{\mathbf{n}} \xrightarrow{P} 0$$

## 5 Estudio de la convergencia $L_{\infty}$

A partir del estudio de la convergencia  $L_1$ , damos unas condiciones para asegurar la convergencia  $L_{\infty}$ , con rapidez de convergencia optimal. Las hipótesis hechas son las siguientes:

**Hipótesis 1.** El núcleo  $K$  es una densidad de probabilidad sobre  $\mathbb{R}^d$  y

$$\int \|z\| K(z) dz < \infty.$$

Además, suponemos que  $K$  verifica una condición de Lipschitz

$$|K(x) - K(y)| < C \|x - y\|$$

donde  $\|\cdot\|$  es la norma usual sobre  $\mathbb{R}^d$ .

**Hipótesis 2.** La densidad  $f$  verifica una condición de Lipschitz

$$|f(x) - f(y)| < C \|x - y\|.$$

**Hipótesis 3.** La densidad  $f_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}(x, y)$  de la pareja  $(X_{\mathbf{i}}, X_{\mathbf{j}})$  existe y para todo  $x, y$  e  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ , verifica:

$$|f_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}(x, y) - f(x)f(y)| \leq C$$

donde  $C$  es una constante positiva.

Sea

$$\Psi_{\mathbf{n}} = \left( \log \hat{\mathbf{n}} \left( \hat{\mathbf{n}} b_{\mathbf{n}}^d \right)^{-1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

Supongamos que el coeficiente de mezcla  $\varphi(i)$  tiende a cero con rapidez geométrica, es decir:

$$\varphi(i) \leq Ci^{-\theta}, \tag{15}$$

con  $\theta > 0$ .

Bajo las hipótesis que conciernen a la rapidez de convergencia de  $b_{\mathbf{n}}$  hacia cero del tipo:

$$\hat{\mathbf{n}}b_{\mathbf{n}}^{\theta_1} (\log \hat{\mathbf{n}})^{\theta_2} \rightarrow \infty, \tag{16}$$

con los parámetros  $\theta_1$  y  $\theta_2$  bien escogidos, se muestra que:

$$\sup_{x \in D} |f_{\mathbf{n}}(x) - f(x)| = O(\Psi_{\mathbf{n}}) \text{ en probabilidad,}$$

y donde  $D$  es un compacto de  $\mathbb{R}^d$ .

Se puede notar que la condicion (16) implica, para  $\theta_1 > d$ , que:

$$\hat{\mathbf{n}}b_{\mathbf{n}}^d \rightarrow \infty. \tag{17}$$

En el caso  $N = 1$ , esta condición (17) es la condición usual para la convergencia en probabilidad de los estimadores del núcleo. Esto muestra que las condiciones anteriores no son drásticas.

Estamos interesados en la convergencia uniforme casi segura. Nos ubicamos en el contexto de una mezcla exponencial:

$$\varphi(i) = C \exp \{-si\} \tag{18}$$

con  $s > 0$ . Bajo las hipótesis de decrecimiento de  $b_{\mathbf{n}}$  hacia cero:

$$\hat{\mathbf{n}}b_{\mathbf{n}}^d (\log \hat{\mathbf{n}})^{-2N-1} \rightarrow \infty \tag{19}$$

entonces, mostramos que

$$\sup_{x \in D} |f_{\mathbf{n}}(x) - f(x)| = O(\Psi_{\mathbf{n}}) \text{ casi segura.}$$

Hemos dado aqu el mismo tipo de resultado para mezclas más débiles, con condiciones sobre  $b_{\mathbf{n}}$  evidentemente un poco más severas.

## 6 Algunos lemas útiles

**Lema 1** Sean  $S_1, S_2, \dots, S_r$   $r$  conjuntos que contienen  $m$  sitios cada uno a una distancia tal que:  $\text{dist}(S_i, S_j) \geq \delta$  para todo  $i \neq j$  donde  $1 \leq i \leq r$  y  $1 \leq j \leq r$ . Supongamos que  $Y_1, Y_2, \dots, Y_r$  sea una sucesión de variables aleatorias  $\alpha$ -mezcladas en el sentido de (1) y medibles con relación a  $\mathcal{B}(S_1), \mathcal{B}(S_2), \dots, \mathcal{B}(S_r)$  respectivamente. Sean  $\xi$  y  $\nu$  dos reales positivos tales que

$$\xi \leq \|Y_j\|_\nu < +\infty$$

para  $1 \leq j \leq r$ .

Entonces existe una sucesión de variables aleatorias independientes  $Z_1, Z_2, \dots, Z_r$  tales que  $Z_i$  tiene la misma ley que  $Y_i$  y satisface

$$P[|Z_i - Y_i| > \xi] \leq C(\|Y_i\|_\nu / \xi)^\tau (h((r-1)m, m)\varphi(\delta))^{2\tau}, \quad (20)$$

donde  $\tau = \nu/(2\nu + 1)$ .

El lema siguiente es una generalización, en el contexto de los campos aleatorios, del lema de aproximación de Rio (1993) de variables  $\alpha$ -mezcladas para variables independientes.

**Lema 2** Sean  $S_1, S_2, \dots, S_r$   $r$  conjuntos que contienen  $m$  sitios a distancia  $\text{dist}(S_i, S_j) \geq \delta$  para todo  $i \neq j$  donde  $1 \leq i \leq r$  y  $1 \leq j \leq r$ . Supongamos que  $Y_1, Y_2, \dots, Y_r$  es una sucesión de variables aleatorias de valores reales,  $\alpha$ -mezcladas en el sentido de (1), medibles con relación a  $\mathcal{B}(S_1), \mathcal{B}(S_2), \dots, \mathcal{B}(S_r)$  respectivamente y supongamos que los  $Y_i$  sean con valores en  $[a, b]$ .

Entonces existe una sucesión de variables aleatorias independientes  $Y_1^*, Y_2^*, \dots, Y_r^*$ ; independientes respectivamente de  $Y_1, Y_2, \dots, Y_r$  tales que cada  $Y_i^*$  tiene la misma ley que  $Y_i$  y satisface:

$$\sum_{i=1}^r E |Y_i - Y_i^*| \leq 2r(b-a)h((r-1)m, m)\varphi(\delta). \quad (21)$$

### 6.1 Algunas extensiones posibles

El estudio de los campos aleatorios es una vasta cantera matemática aun por explorar en gran parte, en virtud de todas las posibles aplicaciones. Podría citar en la línea de nuestros trabajos anteriores, los desarrollos sobre los campos lineales, para ir más allá de las hipótesis de mezcla. Otro problema



interesante será el estudio de los problemas relacionados con la regresión sobre campos aleatorios (en vista de su importancia por ejemplo en problemas de epidemiología). Dicho de otro modo, mucho hay por hacer, y sin ninguna duda, ello va a originar nuevos trabajos de investigación.

## Referencias

- [1] Athreya, K. B. et Pantula, S.G. (1986) Mixing properties of Harris chains and autoregressive processes. *J. Appl. Prob.*, **23**, 880-892.
- [2] Berbee, H.C.P. (1979) Random walks with stationary increments and renewal theory. *Math. Centr. Amsterdam*.
- [3] Bolthausen, E. (1982) On the central limit theorem for stationary random fields. *Ann. Prob.*, **10**, 1047-1050.
- [4] Bosq, D. (1975) Inégalité de Bernstein pour les processus stationnaires et mélangeants. *C.R. Acad. Sci., Paris, Sér. A* **290**, 711-713.
- [5] Bosq, D. (1991) Inégalité de Bernstein pour un processus mélangeant à temps discret ou continu. *Rapport Tech. no 126*, L.S.T.A., Univ. Paris 6.
- [6] Bosq, D. (1996) *Nonparametric statistics for stochastic processes. Estimation and prediction*. Springer Verlag - Lectures Notes in Statistics.
- [7] Bosq, D. et Delecroix (1985) Nonparametric prediction of a Hilbert space valued random variable. *Stoch. Proc. and their Appl.*, **10**, 271-280.
- [8] Bosq, D. et Lecoutre J.P. (1987) *Théorie de l'estimation fonctionnelle*. Economica. Paris.
- [9] Bradley, R.C. (1983) Approximation theorem for strongly mixing random variables. *Michigan Maths. J.*, **30**, 69-81.
- [10] Carbon, M. (1982) Sur l'estimation asymptotique d'une classe de paramètres fonctionnels pour un processus stationnaire. *Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle - Université de Lille*.
- [11] Carbon, M. (1983). Inégalité de Bernstein pour les processus mélangeants non nécessairement stationnaires. Applications. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série A*, 303-306.

- [12] Carbon, M. (1984) Sur l'estimation asymptotique d'une classe de paramètres fonctionnels. *Publication de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, 14p. Volume XXIX, Fascicule 1.
- [13] Carbon, M. (1987) Une inégalité de type Bernstein pour les processus mélangés à temps continu. Application à l'estimation de la densité spectrale. *Publication de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*. Volume XXXI, Fascicule 21-3,15-33.
- [14] Carbon, M. (1988) Inégalités de grandes déviations dans les processus. Applications à l'estimation fonctionnelle. *Thèse de l'Université de Paris VI*.
- [15] Carbon, M. (1989) Sur la convergence uniforme presque complète de quelques paramètres fonctionnels dans le cadre de processus multivariés fortement mélangés et non nécessairement stationnaires. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série A*, 839-842.
- [16] Carbon, M. (1993) Non parametric versus parametric forecasting in time series: a computational point of view (avec M. Delecroix). *Applied Stochastic Models and Data Analysis*, 9, 215-230.
- [17] Carbon, M. (1994) Some large deviations inequalities for strong mixing stochastic processes. Preprint.
- [18] Carbon, M. (1995) Estimation non paramétrique de la densité et de la régression (avec C Francq). *Revue Modulad*.
- [19] Carbon, M. (1995) Contribution à la statistique non paramétrique des processus stochastiques et des champs aléatoires. *Habilitation à diriger des recherches en sciences mathématiques*.
- [20] Carbon, M. (1996) On histograms for linear processes (avec L.T. Tran). *Journal of Statistical Planning and Inference*.
- [21] Carbon, M. (1996) Kernel density estimation for random fields: the  $L_1$ -theory (avec M. Hallin et L.T. Tran). *Journal of Non Parametric Statistics*.
- [22] Carbon, M. (1996) Frequency polygons for dependent processes (avec B. Garel et L.T. Tran) (en révision). *Statistics and Probability Letters*.

- [23] Carbon, M. (1997) Kernel density estimation for random fields (avec L.T. Tran) (en révision).
- [24] Chan, N. H. et Tran, L.T. (1992) Nonparametric tests for serial dependence. *J. Time Series Anal.* 13, 19-28.
- [25] Devroye, L.P. et Györfi, L. (1985) Nonparametric density estimation: the  $L_1$  view. Wiley, New York.
- [26] Doukhan, P. (1991) Mixing. Properties and axamples. *Preprint. Univ. Paris, Orsay.*
- [27] Geman, S et Geman, D. (1984) Stochastic relaxation , Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images. *IEEE Trans. Pattern Anal. Math. Itell. -PAMI*, 6, 721-740.
- [28] Gorodetskii, V.V. (1977) On the strong mixing properties for linear sequences. *Theory Prob. Appl.*, 22, 411-413.
- [29] Guyon, X. (1987) Estimation d'un champ par pseudo-vraisemblance conditionnelle: Etude asymptotique et application au cas markovien. *Proc. 6<sup>th</sup> Franco-Belgian Meeting of Statisticians.*
- [30] Guyong, X. et Richardson, S. (1984) Vitesse de convergence du théorème de la limite centrale pour des champs faiblement dépendants. *Z Wahrscheinlichkeitstheorie verw Gobiete*, 66, 297-314.
- [31] Györfi, L. Härdle, W Sarda, P. et Vieu, P. (1989) Nonparametric curve estimation from time series. *Lectures Notes in Statistics.* Springer Verlag, vol.60.
- [32] Hall, P. et Hannan, E. J. (1988) On stochastic complexity and non parametric density estimation. *Biometrika*, **20**, 705-714.
- [33] Ibragimov, I. A. (1962) Some limits theorems for stationary sequences. *Theory of Proba and its Appl.; vol. VII*, **4**; 349-382.
- [34] Ioannides, A. J. et Roussas, G. G. (1987) Note on uniform convergence for mixing random variables. *Statist. Probab. Lett.*, **5**, 279-285.
- [35] Kashyap, R. L. et Chellapa, R. (1983) Estimation and choice of neighbors in spatial-interaction models of images. *IEEE Trans. Inform. Theory*, **IT-20**, 60-72.

- [36] Masry, E. et Györfi, L. (1987) Strong consistency and rates for recursive probability density estimators of stationary processes. *J. Mult. Anal.*, **22**, 79-93.
- [37] Nakhapetyan, B. S. (1987) An approach to proving limit theorems for dependant random variables. *Theory Prob. Appl.*, **32**, 535-539.
- [38] Neaderhouser, C. C. (1980) Convergence of block spins defined on random fields. *J. Statist. Phys.*, **22**, 673-684.
- [39] Pham, D. T. (1987) The mixing property of bilinear and generalized random coefficient autoregressive models. *Stoch. Proc. Appl.*, **23**, 291-300.
- [40] Pham, D. T. and Tran, L. T. (1985) Some mixing properties of time series models. *Stochastic Processes and Their Applications*, **20**, 295-306.
- [41] Rio, E. The functional law of iterated logarithm for strongly mixing processes. *Prépublications mathématiques de l'Université de Paris Sud 9361*.
- [42] Robinson, P. M. (1983) Nonparametric estimators for time series. *J. Time Series Anal.*, **4**, 185-207.
- [43] Robinson, P. M. (1987) Time series residuals with application to probability density estimation. *J. Time Series Anal.*, **8**, 329-344.
- [44] Rosenblatt, M. (1985) *Stationary sequences and random fields*. Birkhauser, Boston.
- [45] Roussas, G. G. (1969a) Nonparametric estimation in Markov processes. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **21**, 73-87.
- [46] Roussas, G. G. (1969b) Nonparametric estimation of the transition distribution function of a Markov process. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **40**, 1386-1400.
- [47] Roussas, G. G. (1988a) A moment inequality of  $S_{n,k}$  for triangular arrays of random variables under mixing conditions, with applications. *In K. Matusita, Ed., Statistical Theory and Data Analysis*, **2**.
- [48] Roussas, G. G. (1988b) Nonparametric estimation in mixing sequences of random variables. *J. Statist. Plan. Infer.*, **18**, 135-149.

- [49] Takahata, H. (1983) On the rates in the central limit theorem for weakly dependent random fields. *Z. Wahrsch Verw. Gebiete*, **62**, 477-480.
- [50] Withers, C. S. (1981) Conditions for linear processes to be strong mixing. *Z. Wahrsch Verw. Gebiete*, **57**, 477-480.
- [51] Tran, L. T. (1989a) Recursive density estimation under dependence. *IEEE Trans. Inform. Theory*, **35**, 1103-1108.
- [52] Tran, L. T. (1989b) The  $L_1$  convergence of kernel density estimates under dependence. *The Canadian J. of Statist.*, **17**, 197-208.
- [53] Tran, L. T. (1990) Kernel density estimation on random fields. *J. Mult. Anal.*, **34**, 37-53.
- [54] Tran, L. T. (1992) Kernel density estimation of linear processes. *Stochastic Process. Appl.*, **41**, 281-296.
- [55] Tran, L. T. (1993) Nonparametric function estimation for time series by local average estimators. *Annals of Statistics*, **21**, 1040-1057.
- [56] Tran, L. T. (1994) Density estimation for time series by histograms. *J. Statist. Plann. Infer.*, **40**, 61-79.
- [57] Tran, L. T. et Yakowitz, S. (1992) Nearest neighbor estimators for random fields. *J. Mult. Anal.*, **43**, 1-24.
- [58] Yakowitz, S. (1985) Nonparametric density estimation, prediction and regression for Markov sequences. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **80**, 215-221.
- [59] Yakowitz, S., Gani, J. et Hayes, R. (1990) Random cellular automata models for epidemiology. *Apply. Math. Comput.*, **40**, 41-54.
- [60] Yakowitz, S., Gani, J. et Hayes, R. (1992) Automatic learning for dynamic Markov fields, with applications to epidemiology. *Oper. Res.*, to appear.

## INTRODUCCIÓN A LA INTEGRACIÓN ESTOCÁSTICA

SANTIAGO CAMBRONERO \*

---

### Resumen

Se presenta la construcción de la integral estocástica con respecto al movimiento browniano, así como sus principales propiedades y algunos ejemplos. Se presenta una aplicación sencilla a modelos de crecimiento, y se trata de enfatizar la utilidad de esta teoría en algunas áreas importantes de la matemática aplicada.

### 1 Preliminares y notación

Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , y una variable aleatoria  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\sigma(X)$  denota la  $\sigma$ -álgebra generada por  $X$ , y  $P_X(A) = P[X \in A]$  (para  $A$  boreliano en  $\mathbb{R}$ ) la distribución de  $X$ . La esperanza de  $X$  se define por

$$EX := \int_{\mathbb{R}^n} x dP_X = \int_{\Omega} X dP, \quad \left( \text{si } \int_{\Omega} |X| dP < \infty \right).$$

Un proceso estocástico es una familia  $(X_t)_{t \geq 0}$  de variables aleatorias en  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , que toman valores en  $\mathbb{R}$ . Para  $w \in \Omega$  fijo, la función  $X(\cdot, w) :$

---

\*CIMPA, Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, 2060 San José, Costa Rica. Fax: (506) 2074397.

$[0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  se llama el camino correspondiente a  $w$ . La familia creciente de  $\sigma$ -álgebras  $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$ , definida por

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s : s \leq t),$$

se llama la filtración del proceso  $(X_t)_{t \geq 0}$ . Si  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  es una familia creciente de  $\sigma$ -álgebras, tal que  $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t$ ,  $\forall t \geq 0$ , se dice que el proceso  $(X_t)_{t \geq 0}$  es adaptado a la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ .

Las distribuciones finito-dimensionales del proceso  $X$  son las medidas  $\mu_{t_1, \dots, t_k}$  definidas en  $\mathbb{R}^k$ , para  $k \in \mathbb{N}$ ,  $t_1, \dots, t_k \in T$ , por

$$\mu_{t_1, \dots, t_k}(A_1 \times \dots \times A_k) = P[X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_k} \in A_k],$$

para  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ . Estas distribuciones determinan en gran parte el proceso  $X$ .

Un proceso  $(X_t)_{t \geq 0}$  tal que  $E|X_t| < \infty$ ,  $\forall t \geq 0$  se llama

- martingala si  $E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$  c.s. para  $t \geq s \geq 0$ .
- submartingala si  $E(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s$  c.s. para  $t \geq s \geq 0$ .
- supermartingala si  $E(X_t | \mathcal{F}_s) \leq X_s$  c.s. para  $t \geq s \geq 0$ .

Si  $(X_t)_{t \geq 0}$  es una submartingala con caminos continuos, entonces para  $\lambda > 0$ ,  $T > 0$ .

$$P \left[ \max_{0 \leq t \leq T} X_t \geq \lambda \right] \leq \lambda^{-1} E X_T^+. \quad (1)$$

En particular, si  $(X_t)_{t \geq 0}$  es una martingala y  $p \geq 1$ , entonces

$$P \left[ \max_{0 \leq t \leq T} |X_t| \geq \lambda \right] \leq \lambda^{-p} E |X_T|^p.$$

Una variable aleatoria  $\tau$  se llama tiempo de parada para la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  si para  $t \geq 0$  se tiene

$$[\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t.$$

La idea es que  $\tau$  nos dice cuando parar (en un juego de azar por ejemplo), y esta decisión no puede depender del futuro, sólo de la información  $\mathcal{F}_t$  que se tiene hasta el momento. Por ejemplo, si el proceso tiene caminos continuos, y  $A$  es cerrado en  $\mathbb{R}$ , se puede demostrar que

$$\tau = \min \{t \geq 0 : X_t \in A\}$$

es un tiempo de parada.

## 2 Movimiento Browniano

Un movimiento browniano (estándar) es un proceso estocástico  $(b_t)_{t \geq 0}$  con caminos continuos, tal que  $P[b_0 = 0] = 1$ , y que cumple la siguiente propiedad:

Dados  $t_n > t_{n-1} > \dots > t_0 = 0$ , las variables

$$b(t_1) - b(t_0), \dots, b(t_n) - b(t_{n-1})$$

son independientes y normalmente distribuidas, con

$$E[b(t_i) - b(t_{i-1})] = 0, \quad \text{Var}[b(t_i) - b(t_{i-1})] = t_i - t_{i-1}.$$

Por la independencia de incrementos, si  $t > s$  se tiene

$$E[b(t)b(s)] = E[(b(t) - b(s))b(s)] + E[b^2(s)] = E[b^2(s)] = s.$$

Equivalentemente, un movimiento browniano estándar es una familia gaussiana  $(b_t)_{t \geq 0}$ , con caminos continuos y tal que  $P[b_0 = 0] = 1$ ,  $E b_t = 0$ , y

$$\text{cov}(b(t), b(s)) = \min(t, s), \quad \forall t, s \geq 0.$$

Para una construcción de este proceso puede consultarse [2], [4], [6] y [7]. El movimiento browniano posee además las siguientes propiedades (las cuatro primeras pueden demostrarse como ejercicio, puede también consultarse [2]):

1. Propiedad de Markov: Dado un movimiento browniano  $b(t) : t \geq 0$ , el proceso  $(X_t)_{t \geq 0}$  definido por  $X_t = b(t+s) - b(s)$ , es también un movimiento browniano, independiente de  $\mathcal{F}_s$ .
2.  $b^2(t) - t$  es una martingala. Este hecho es fundamental en la teoría de integración estocástica.
3. Dado un movimiento browniano  $b(t)$ , los procesos  $X_t = cb(t/c^2)$  y  $Y_t = tb(1/t)$  son también movimientos brownianos.
4. El proceso  $-b(t) : t \geq 0$  es un browniano.
5. Los caminos brownianos son de variación infinita. De hecho, considere

$$V_n = \sum_{k=1}^{2^n} |b(k2^{-n}) - b((k-1)2^{-n})|$$



y note que  $V_n$  es creciente, y además

$$\begin{aligned} E[e^{-V_n}] &= \left( E[e^{-|b(2^{-n})|}] \right)^{2^n} \\ &\leq \left( E[1 - |b(2^{-n})| + b^2(2^{-n})] \right)^{2^n} \\ &= \left( 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^{-n/2} + 2^{-n} \right)^{2^n} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Consecuentemente tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^n} |b(k2^{-n}) - b((k-1)2^{-n})| = \infty, \text{ c.s.}$$

6. También se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^n} |b(k2^{-n}) - b((k-1)2^{-n})|^2 = 1, \text{ c.s.}$$

y más generalmente que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^m |b(k2^{-n}) - b((k-1)2^{-n})|^2 + |b(t) - b(k2^{-n})|^2 \right] = t, \text{ c.s.}$$

donde  $m$  es tal que  $k2^{-n} \leq t < (k+1)2^{-n}$ . De hecho la convergencia es uniforme en  $t \in [0, 1]$ . Para ver esto basta con observar que

$$Z_n(t) := \sum_{k=1}^m |b(k2^{-n}) - b((k-1)2^{-n})|^2 + |b(t) - b(k2^{-n})|^2 - t$$

es una martingala continua, y por la desigualdad de martingalas

$$\begin{aligned} P \left[ \max_{t \leq 1} |Z_n(t)| > n2^{-n/2} \right] &\leq 2^n n^{-2} E |Z_n(1)|^2 \\ &= 2^{2n} n^{-2} E \left( b(2^{-n})^2 - 2^{-n} \right)^2 \\ &= n^{-2} E (b(1)^2 - 1)^2, \end{aligned}$$

pues  $2^{-n/2}b(1)$  tiene la misma distribución que  $b(2^{-n})$ . Por el lema de Borel – Cantelli obtenemos

$$P \left[ \max_{t \leq 1} |Z_n(t)| \leq n2^{-n/2}, n \uparrow \infty \right] = 1.$$

7. (Ver [2], [1], [6]) Los caminos brownianos son derivables en ningún punto. En otras palabras

$$P \{b : b \text{ es derivable en algún } t > 0\} = 1.$$

8. (Ver [1], [6], [7], [4]) Ley del logaritmo iterado:

$$P \left[ \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{b(t)}{\sqrt{2t \ln \ln \frac{1}{t}}} = 1 \right] = P \left[ \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{b(t)}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1 \right] = 1.$$

9. (Ver [1], [6], [7], [4]) Módulo de continuidad (Lévy):

$$P \left[ \lim_{t \rightarrow 0} \sup_{|t_1 - t_2| = t} \frac{|b(t_1) - b(t_2)|}{\sqrt{2t \ln \frac{1}{t}}} = 1 \right] = 1.$$

### 3 Integración estocástica

Vamos a mostrar cómo definir la integral

$$\int_0^t f(s, w) db_s(w),$$

donde  $b$  es browniano empezando en el origen, y  $f$  es un proceso con ciertas propiedades. La propiedad 5 arriba muestra que esto no es posible hacerlo en el sentido de Riemann – Stieltjes. Para ver la clase de problemas que pueden presentarse consideremos la función  $f(t, w) = b_t(w)$ . Es natural pensar en la aproximación

$$b(t, w) \approx \varphi(t, w) = \sum_{k=1}^n b_{t_k^*}(w) 1_{[t_{k-1}, t_k[}(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

donde  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ ,  $t_{k-1} \leq t_k^* \leq t_k$ , y tratar de definir  $\int_0^T b_t(w) db_t(w)$  como el límite, en algún sentido, de las integrales

$$\int_0^1 \varphi(t, w) db_t(w) = \sum_{k=1}^n b(t_k^*) (b(t_k) - b(t_{k-1})).$$

Sin embargo note que para  $t_k^* = t_{k-1}$  obtenemos por la independencia de incrementos

$$E \left[ \int_0^T \varphi(t, w) db_t(w) \right] = \sum_{k=1}^n E [b(t_{k-1}) (b(t_k) - b(t_{k-1}))] = 0,$$

mientras que para  $t_k^* = t_k$  se obtiene

$$\begin{aligned} E \left[ \int_0^1 \varphi(t, w) db_t(w) \right] &= \sum_{k=1}^n E [b(t_k) (b(t_k) - b(t_{k-1}))] \\ &= \sum_{k=1}^n E [(b(t_k) - b(t_{k-1}))^2] = T. \end{aligned}$$

Entonces, no importa qué tan fina sea la partición, las dos aproximaciones son radicalmente diferentes. Esto es otra consecuencia del hecho que los caminos brownianos tienen variación infinita, y nos indica que contrario a lo que pasa en el caso clásico, la escogencia de  $t_k^*$  es determinante. En este trabajo apegaremos a  $t_k^* = t_{k-1}$ , lo que corresponde a la integral de Itô. Para  $t_k^* = \frac{1}{2}(t_{k-1} + t_k)$  se obtiene la integral de Stratonovich. La clase de integrandos para los que la construcción de Itô funciona se describe a continuación:

**Definición:** Un proceso

$$f : [0, \infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

se llama no anticipativo (o progresivamente medible) con respecto a la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  si es adaptado a esta filtración, y si la función  $(t, w) \rightarrow f(t, w)$  es medible con respecto a  $\mathcal{B} \times \mathcal{F}_\infty$ , donde  $\mathcal{B}$  es la  $\sigma$ -álgebra de borelianos de  $[0, \infty[$ , y

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t).$$

Vamos a definir la integral de Itô de este tipo de procesos con respecto al movimiento browniano, con la hipótesis adicional

$$P \left[ \int_0^T f^2(t, w) dt < \infty \right] = 1.$$

Tomemos  $T = 1$  para simplificar. Vamos a seguir la construcción de [?].

**Paso 1.**

Considere un proceso no anticipativo  $\varphi(t, w)$  tal que para algún  $n \geq 1$  se tiene

$$\varphi(t, w) = \varphi((k-1)2^{-n}, w), \text{ para } (k-1)2^{-n} \leq t < k2^{-n}, k \leq 2^n. \quad (2)$$

Esto es,  $\varphi(t) = \varphi(2^{-n} [2^n t])$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ . A este tipo de procesos les llamaremos simples. Definimos

$$\int_0^t \varphi db = \sum_{k=1}^j \varphi(t_{k-1}, w) [b(t_k) - b(t_{k-1})] + \varphi(t_j, w) [b(t) - b(t_j)], \quad (3)$$

donde  $0 \leq t \leq 1$ ,  $t_k = k2^{-n}$ ,  $t_j \leq t < t_{j+1}$ . Tenemos las siguientes propiedades:

- (a) La definición (3) es independiente de  $n$ , siempre que (2) se cumpla. En otras palabras, si se cambia  $n$  por  $m > n$ , la definición no cambia.
- (b) Dados dos procesos simples  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ , y una constante  $c$ , tenemos

$$\int_0^t (c\varphi_1 + \varphi_2) db = c \int_0^t \varphi_1 db + \int_0^t \varphi_2 db.$$

- (c) La integral

$$\mathcal{I}(t, w) = \int_0^t \varphi db = \int_0^t \varphi(s, w) db(s, w)$$

es una función continua de  $t \in [0, 1]$ , para casi todo  $w$ .

- (d) Para  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tenemos

$$P \left[ \max_{t \leq 1} \left( \int_0^t \varphi db - \frac{\alpha}{2} \int_0^t \varphi^2 ds \right) > \beta \right] \leq e^{\alpha\beta}. \quad (4)$$

Para ver esto basta con observar que

$$Z(t) = \exp \left( \int_0^t \alpha \varphi db - \frac{\alpha^2}{2} \int_0^t \varphi^2 ds \right)$$

es una martingala con  $E[Z(1)] = 1$ , y entonces por (1)

$$P \left[ \max_{t \leq 1} \left( \int_0^t \varphi db - \frac{\alpha}{2} \int_0^t \varphi^2 ds \right) > \beta \right] = P \left[ \max_{t \leq 1} Z(t) > e^{\alpha\beta} \right] \leq e^{-\alpha\beta}.$$

**Paso 2.**

Si las funciones simples  $\varphi_n$  cumplen

$$P \left[ \int_0^1 \varphi_n^2 dt \leq 2^{-n}, n \uparrow \infty \right] = 1,$$

y si  $\theta > 1$ , tenemos

$$P \left[ \max_{t \leq 1} \left| \int_0^t \varphi_n db \right| < \theta \sqrt{2^{-n+1} \log n}, n \uparrow \infty \right] = 1.$$

Basta con tomar  $\alpha = \sqrt{2^{n+1} \log n}$ ,  $\beta = \theta \sqrt{2^{-n-1} \log n}$  en (4), con lo que  $e^{-\alpha\beta} = n^{-\theta}$ , que es el término general de una serie convergente. Por el lema de Borel – Cantelli se sigue que

$$P \left[ \max_{t \leq 1} \int_0^t \varphi_n db < \frac{\alpha}{2} \int_0^t \varphi_n^2 ds + \beta, n \uparrow \infty \right] = 1.$$

Pero como

$$\frac{\alpha}{2} \int_0^t \varphi_n^2 ds + \beta \leq \frac{\alpha}{2} 2^{-n} + \beta < \theta \sqrt{2^{-n+1} \log n},$$

se sigue que

$$P \left[ \max_{t \leq 1} \int_0^t \varphi_n db < \theta \sqrt{2^{-n+1} \log n}, n \uparrow \infty \right] = 1.$$

Finalmente, como lo mismo es cierto si reemplazamos  $\varphi_n$  por  $-\varphi_n$ , obtenemos el resultado.

**Paso 3.**

Dado un proceso no anticipativo  $\varphi$  tal que  $\int_0^1 \varphi^2 dt < \infty$ , existen procesos simples  $\varphi_n$  tales que

$$P \left[ \int_0^1 (\varphi - \varphi_n)^2 dt \leq 2^{-n-3}, n \uparrow \infty \right] = 1.$$

**Prueba:**

Defina  $\varphi \equiv 0$  para  $t < 0$ . Para  $k \in \mathbb{N}$  defina

$$\varphi_k(t) = \int_{t-2^{-k}}^t \varphi(s) ds.$$

Para casi todo  $w$  tenemos que  $\varphi \in L^2[0, 1]$ , así que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 (\varphi - \varphi_k)^2 dt = 0.$$

Ahora fijemos  $k$  y definamos

$$\varphi_{k,m}(t) = \varphi_k(2^{-m} [2^m t]), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Como  $\varphi_k$  es continua tenemos también

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 (\varphi_k - \varphi_{k,m})^2 dt = 0,$$

de donde

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 (\varphi - \varphi_{k,m})^2 dt \right) = 0.$$

Dado  $n \in \mathbb{N}$ , podemos escoger  $k$  y  $m$  tales que

$$P \left[ \int_0^1 (\varphi - \varphi_{k,m})^2 dt > 2^{-n-3} \right] < 2^{-n},$$

y luego definir  $\varphi_n := \varphi_{k,m}$ . Por el lema de Borel – Cantelli se obtiene el resultado.  $\square$

#### **Paso 4.**

Ahora podemos definir la integral estocástica para cualquier  $\varphi$  que satisfaga las hipótesis del paso 3. Dadas las  $\varphi_n$  construidas allí tenemos

$$P \left[ \int_0^1 (\varphi_n - \varphi_{n-1})^2 dt \leq 2^{-n}, n \uparrow \infty \right] = 1,$$

y entonces por el paso 2,

$$P \left[ \max_{t \leq 1} \left| \int_0^t (\varphi_n - \varphi_{n-1}) db \right| < \theta \sqrt{2^{-n+1} \log n}, n \uparrow \infty \right] = 1.$$

Podemos entonces definir

$$\int_0^t \varphi db := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \varphi_n db.$$

El paso 2 demuestra que esta definición es independiente de la sucesión  $(\varphi_n)$  escogida. Como la convergencia es uniforme, la integral

$$\mathcal{I}(t) = \int_0^t \varphi db$$

es continua y está definida simultáneamente para todo  $t \in [0, 1]$ , y para casi todo camino browniano.

**Paso 5.**

Dado un proceso no anticipativo  $\varphi$  tal que  $P \left[ \int_0^T \varphi^2 dt < \infty \right] = 1$ , se define la integral  $\mathcal{I}(t) = \int_0^t \varphi db$  simultáneamente para todo  $t \in [0, T]$ , de la misma forma en que se hizo arriba para  $T = 1$ . Si además

$$P \left[ \int_0^T \varphi^2 dt < \infty, \forall T > 0 \right] = 1, \quad (5)$$

podemos definir dicha integral simultáneamente para todo  $t \leq N$  (para todo  $N \in \mathbb{N}$ ). Luego esta definición es simultánea para todo  $t \geq 0$ , y casi todo camino browniano.

**Nota:**

Si además

$$P \left[ \int_0^\infty \varphi^2 dt < \infty \right] = 1,$$

entonces se puede definir  $\int_0^\infty \varphi db$  de manera que

$$P \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \varphi db = \int_0^\infty \varphi db \right] = 1.$$

Para esto basta con escoger las  $\varphi_n$  de manera que  $\varphi_n \equiv 0$  lejos del origen, y adaptar los pasos 2 y 4. Es un buen ejercicio completar los detalles.

### 3.1 Propiedades básicas

1. Si  $\varphi$  y  $\psi$  satisfacen las hipótesis del paso 3, tenemos

$$\int_0^t (c\varphi + \psi) db = c \int_0^t \varphi db + \int_0^t \psi db.$$

2. La integral estocástica

$$\mathcal{I}(t) = \int_0^t \varphi db$$

es continua en  $[0, \infty[$ .

3. Si  $\tau$  es un tiempo de parada tenemos

$$\int_0^\tau \varphi db = \int_0^\infty \varphi 1_{[t \leq \tau]}(t) db.$$

4. Si

$$P \left[ \int_0^\infty \varphi^2 dt < \infty \right] = 1,$$

tenemos

$$E \left( \int_0^\infty \varphi db \right)^2 \leq \|\varphi\|^2 := E \left( \int_0^\infty \varphi^2 dt \right) \leq \infty.$$

Si además  $\|\varphi\|^2 < \infty$  tenemos

$$E \left( \int_0^\infty \varphi db \right)^2 = \|\varphi\|^2, \quad E \left( \int_0^\infty \varphi db \right) = 0.$$

5. El proceso

$$Z(t) = \exp \left[ \int_0^t \varphi db - \frac{1}{2} \int_0^t \varphi^2 ds \right]$$

es una supermartingala con  $E(Z) \leq 1$ .

Las primeras tres propiedades son evidentes. Para una demostración de 3, 4 y 5, puede consultarse [7].

### 3.2 Un ejemplo

El ejemplo más sencillo de integral estocástica (que no sea trivial) es

$$\int_0^t b(s) db(s).$$

Para calcular esta integral estocástica tomemos

$$\varphi_n(t) = b(2^{-n} [2^n t]).$$



Como tenemos

$$P \left[ \int_0^t (b - \varphi_n)^2 ds \rightarrow 0, \forall t > 0 \right] = 1,$$

se sigue que

$$\int_0^t b(s) db(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \varphi_n db.$$

Ahora, si  $m = [2^n t]$  y  $t_k = k2^{-n}$  se tiene

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t \varphi_n db &= 2 \sum_{k=1}^m b(t_{k-1}) [b(t_k) - b(t_{k-1})] + 2b(t_m) [b(t) - b(t_m)] \\ &= b^2(t) - \left[ \sum_{k=1}^m [b(t_k) - b(t_{k-1})]^2 + [b(t) - b(t_m)]^2 \right]. \end{aligned}$$

Consecuentemente, por la propiedad 6 del movimiento browniano,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \int_0^t \varphi_n db = b^2(t) - t.$$

Esto demuestra que

$$\int_0^t b(s) db(s) = \frac{1}{2} [b^2(t) - t].$$

Este ejemplo muestra una de los puntos delicados y a la vez interesantes de esta teoría. En vez de tener  $d(b_t^2) = 2b_t db_t$  se tiene

$$d(b_t^2) = 2b_t db_t + dt.$$

En general, si  $f$  es de clase  $\mathcal{C}^\infty$  se tiene

$$d(f(b)) = f'(b)db + \frac{1}{2}f''(b)dt.$$

En otras palabras, en el diferencial  $df(b)$  deben tomarse en cuenta los dos primeros términos de la serie de Taylor, y sustituir  $(db)^2$  por  $dt$ . Este hecho se conoce como el lema de Itô, y es el equivalente al teorema fundamental del cálculo para integrales estocásticas.

Dadas  $\varphi$  y  $\mu$  no anticipativas, tal que  $\varphi$  satisface (5), y  $\mu$  satisface

$$P \left[ \int_0^t |\mu(s)| ds < \infty, \forall t \geq 0 \right] = 1,$$

se puede definir la *integral estocástica*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \varphi db + \int_0^t \mu ds, \quad \forall t \geq 0,$$

siempre que la variable aleatoria  $X(0)$  sea independiente de  $\mathcal{F}_\infty$ . Formalmente se escribe

$$dX_t = \varphi db_t + \mu dt.$$

**Lema 1** (Itô) Si  $f = f(t, x_1, \dots, x_n)$ , y  $X_1, \dots, X_n$  son integrales estocásticas

$$X_i(t) = X_i(0) + \int_0^t \varphi_i(s) db + \int_0^t \mu_i(s) ds,$$

entonces  $X(t) = f(t, X_1(t), \dots, X_n(t))$  es también una integral estocástica, tal que

$$dX = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dX_i dX_j,$$

donde  $dX_i dX_j = \varphi_i \varphi_j dt$ .

En otras palabras, al calcular  $dX_i dX_j$  se hace uso de las identidades  $(db)^2 = dt$ ,  $db \cdot dt = (dt)^2 = 0$ .

### Ejemplos

1. Para calcular

$$\int_0^t b^2(s) ds$$

tomamos  $f(x) = x^3$ . Tenemos  $f'(x) = 3x^2$ ,  $f''(x) = 6x$ , así que

$$d(b^3) = 3b^2 db + 3b dt,$$

esto es

$$\int_0^t b^2 db = \frac{1}{3} b^3(t) - \int_0^t b ds.$$

2. Para

$$Z = \exp \left[ \int_0^t \varphi db - \frac{1}{2} \int_0^t \varphi^2 ds \right]$$

tenemos  $Z = e^X$ , donde  $X = \int_0^t \varphi db - \frac{1}{2} \int_0^t \varphi^2 ds$ . Como  $dX = \varphi db - \frac{1}{2} \varphi^2 dt$ , tenemos

$$dZ = e^X dX + \frac{1}{2} e^X (dX)^2 = e^X \left( \varphi db - \frac{1}{2} \varphi^2 dt + \frac{1}{2} \varphi^2 dt \right) = Z \varphi db.$$

Para  $\varphi \equiv 1$  obtenemos

$$d \left( e^{bt-t/2} \right) = e^{bt-t/2} db.$$

Para  $\varphi \equiv \alpha$  tenemos

$$\exp \left( \alpha b_t - \frac{\alpha^2}{2} t \right) = 1 + \alpha \int_0^t \exp \left( \alpha b_s - \frac{\alpha^2}{2} s \right) db_s.$$

Luego por la propiedad 4 se sigue que

$$E \left[ \exp \left( \alpha b_t - \frac{\alpha^2}{2} t \right) \right] = 1, \quad \forall t \geq 0,$$

esto es

$$E \left[ e^{\alpha b_t} \right] = \exp \left( \frac{\alpha^2}{2} t \right), \quad \forall t \geq 0.$$

**Nota:** En general, por la propiedad 4,  $Z$  será una martingala en  $[0, T]$  siempre que

$$E \left( \int_0^T \varphi^2 Z^2 dt \right) < \infty.$$

Una condición suficiente para que esto ocurra es la siguiente (*condición de Novikov*):

$$E \left[ \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^T \varphi^2 dt \right) \right] < \infty.$$

Ver por ejemplo [6]

## 4 Ecuaciones diferenciales estocásticas

No ahondaremos aquí en los teoremas de existencia y unicidad. Solamente daremos algunos ejemplos sencillos que surgen en aplicaciones.

Un ejemplo de ecuación diferencial estocástica es

$$dX = \varphi X db,$$

donde  $\varphi$  es un proceso no anticipativo. En el ejemplo anterior vimos que

$$Z = \exp \left[ \int_0^t \varphi db - \frac{1}{2} \int_0^t \varphi^2 ds \right]$$

es una solución de esta ecuación, y además  $Z(0) = 1$ . Suponga que hay otra solución  $Y$  de esta ecuación. Entonces tenemos

$$d \left( \frac{Y}{Z} \right) = \frac{-Y}{Z^2} dZ + \frac{1}{Z} dY + \frac{1}{2} \left[ \frac{2Y}{Z^3} (dZ)^2 - \frac{2}{Z^2} dZ dY \right] = 0.$$

Si  $Y(0) = 1$  concluimos que  $Y \equiv Z$ . Esto muestra que el problema

$$dX = \varphi X db, \quad X(0) = 1,$$

tiene solución única.

En general, una ecuación diferencial estocástica tiene la forma

$$dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) db.$$

Dada una variable aleatoria  $X_0$  (independiente de  $\mathcal{F}_\infty$ ), se busca hallar un proceso no anticipativo tal que

$$X(t) = X_0 + \int_0^t \mu(t, X_t) dt + \int_0^t \sigma(t, X_t) db, \quad t \geq 0.$$

#### 4.1 Ejemplo

Considere un modelo de población

$$dN = rN dt + \alpha N db,$$

que puede interpretarse como

$$\frac{dN}{dt} = (r + \alpha b') N,$$

donde vemos que la tasa relativa de crecimiento de la población es una constante  $r$  más un ruido proporcional al ruido blanco  $b'$ . La solución de esta ecuación está dada implícitamente por

$$\int_0^t \frac{dN_s}{N} = rt + \alpha b_t.$$

Para calcular la integral del lado izquierdo aplicamos el lema de Itô a la función  $\ln N$ , obteniendo:

$$d(\ln N_t) = \frac{dN_t}{N_t} - \frac{1}{2N_t^2} (dN_t)^2 = \frac{dN_t}{N_t} - \frac{\alpha^2}{2} dt.$$

Luego

$$\int_0^t \frac{dN_s}{N} = \ln \frac{N_t}{N_0} + \frac{\alpha^2}{2} t = rt + \alpha db_t,$$

que nos lleva a

$$N_t = N_0 \exp \left[ \left( r - \frac{\alpha^2}{2} \right) t + \alpha b_t \right].$$

Por la ley del logaritmo iterado tenemos que

- (a) Si  $r > \frac{\alpha^2}{2}$  entonces  $N_t \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .
- (b) Si  $r < \frac{\alpha^2}{2}$  entonces  $N_t \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .
- (c) Si  $r = \frac{\alpha^2}{2}$  entonces  $N_t$  oscila entre 0 e  $\infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Como vimos en los ejemplos,  $E(e^{\alpha b_t}) = e^{\frac{1}{2}\alpha^2 t}$ , y dado que  $N_0$  es independiente de  $b$  tenemos

$$E[N_t] = E[N_0] e^{rt}.$$

Esto es, la esperanza de  $N$  sigue un modelo exponencial determinístico con tasa relativa de crecimiento  $r$ .

## 4.2 Comentarios

El rango de aplicación de la teoría de integración estocástica es muy amplio, tanto en áreas externas a la matemática como dentro de ella. Desafortunadamente no hay espacio en estas notas para incluir aplicaciones más sofisticadas, debido al carácter técnico de las mismas. Se le recomienda al lector el libro de Oksendal [8] para el tratado de temas como problemas de paro óptimo, control estocástico, y conexiones con ecuaciones diferenciales parciales, entre otras aplicaciones. En [6] pueden encontrarse otras aplicaciones en finanzas, así como un tratado muy completo de la teoría. En [7] se encuentra la teoría de integración estocástica en una forma muy completa y sintetizada. El libro de Itô y McKean [4] es quizá el más completo en cuanto a la teoría de integración estocástica, pero a la vez el más difícil de leer.

## Referencias

- [1] Breiman, L. (1992) *Probability*. Classics in Appl. Math. SIAM.
- [2] Cambronero, S. (1997) *Introducción a la teoría del movimiento browniano*. Memorias del “Quinto Encuentro Centroamericano de Investigadores en Matemática”, 33–44, febrero de 1997.
- [3] Doob, J.L. (1953) *Stochastic Processes*. John Wiley and Sons, New York.
- [4] Itô, K. & McKean, H.P. (1974) *Diffusion Processes and their Sample Paths*. 2nd ed. Springer–Verlag.
- [5] Kac, M. (1980) *Integration in Function Spaces and some of its Applications*. Accademia Nazionale dei Lincei Scuola Normale Superiore. Pisa.
- [6] Karatzas, I. & Shreve, S.E. (1991) *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer–Verlag. 2nd ed.
- [7] McKean, H.P. (1969) *Stochastic Integrals*. Academic Press, New York.
- [8] Oksendal, B. (1995) *Stochastic Differential Equations*. Springer–Verlag, fourth ed.

## SEPARACIÓN CIEGA DE SEALES ALEATORIAS INDEPENDIENTES

PHILIPPE GARAT \*

---

### Resumen

Consideramos el problema de la separación ciega de seales aleatorias independientes en el marco de mezclas lineales instantáneas y luego convolutivas. Mediante un enfoque de Máxima Verosimilitud, tratamos dos situaciones distintas: para empezar, el caso de seales temporalmente independientes y normales (gaussianas), luego el caso de seales temporalmente correlacionadas, estacionarias en segundo grado con espectros distintos. En cada uno de los casos, proponemos un sistema apropiado de *ecuaciones de separación*.

El primer método de separación está fundamentado en funciones separadoras no lineales: indicamos una resolución iterativa de tipo Newton, que necesita una buena inicialización para evitar convergencia a una solución parásita.

El segundo método constituye un análisis estadístico de segundo orden, y se expresa con ayuda de filtros separadores lineales. Mostramos la existencia de filtros óptimos que son función de las densidades espectrales de las fuentes. Además de una solución iterativa de las ecuaciones de separación, existe en algunas situaciones una resolución *directa* (doble diagonalización de dos matrices simétricas).

El rendimiento asintótico de los dos métodos es presentado: esto permite poner en evidencia las escogencias óptimas de las funciones y

---

\*Laboratoire de Statistique, Université de Rennes 2, Rennes, Francia

filtros separadores. En todos los casos, el comportamiento asintótico no depende de los parámetros de las mezclas, sino solamente de las estadísticas de las fuentes y de las funciones/filtros separadores.



## IDENTIFICATION OF ARMA MODELS USING GENERALIZED REFLECTION COEFFICIENTS

GLAYSAR CASTRO \*

---

### Abstract

The Levinson recursion is generalized to four families of biorthogonal polynomials related to a bilinear form induced by an arbitrary strongly regular matrix. The generalized reflection coefficients turn out to be two triangular arrays of complex numbers which completely describe the structure of the related matrix. An application to order identification of ARMA models is given. A random process with rational spectral density admits a canonical ARMA( $p, q$ ) representation if and only if its sequence of covariances satisfies a minimal ( $p, q$ ) recursive identity. This identity is equivalent to certain conditions on the determinant of an increasing sequence of non Hermitian Toeplitz matrices associated to the covariances of the process. A simple necessary and sufficient condition on the generalized reflection coefficients associated to these matrices is given for obtaining the parameters  $p$  and  $q$  realizing the minimal ( $p, q$ ) recursive identity.

### Resumen

La recursión de Levinson se generaliza a cuatro familias de polinomios biortogonales relacionados con una forma bilineal inducida por

---

\*Escuela de Física y Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela, A.P. 20513, Caracas 1020A, Venezuela. Tel 582-9770689, Fax: 582-6052188.

una matriz regular arbitrariamente fuerte. Los coeficientes de reflexión generalizada se convierten en arreglos triangulares de números complejos que completamente describen la estructura de la matriz relacionada. Se da una aplicación a identificación de modelos ARMA. Un proceso estocástico con densidad espectral racional admite una representación canónica ARMA( $p, q$ ) si y sólo si su sucesión de converianzas satisface una identidad minimal ( $p, q$ ). Esta identidad es equivalente a ciertas condiciones en el determinante de una sucesión de matrices no Hermitianas Toeplitz asociadas a las covarianzas del proceso. Se da una condición necesaria y suficiente sobre los coeficientes de reflexión generalizados asociados a estas matrices con el fin de obtener los parámetros  $p$  y  $q$  que hace mínimo la identidad recursiva ( $p, q$ ).

## Introduction

The one step forward and backward residuals of a stationary random process verify a short recurrence relation called The Levinson recursion [7]. This recursion is the same as certain well-known recursions for the so called discrete Szegő orthogonal polynomials on the unit circle [6] and it is an efficient procedure for solving Toeplitz systems of linear equations. Generalizations of this recursion to positive definite hermitian matrix and to an arbitrary matrix with no singular principal submatrices (strongly regular matrix) are presented in [3] and [4]. In this work, these results are extended easily to semi-infinite strongly regular matrices. A matrix of this type induces a bilinear form in the subspace  $\mathcal{P}_n$  of  $L^2(\mathbf{T})$  ( $\mathbf{T} \cong [0, 2\pi[$  in the unit circle). This bilinear form has all the properties that allow to extend the Levinson recursion to four families of biorthogonal polynomials. The generalized reflection coefficients turn out to be two triangular arrays of complex numbers which completely describe the structure of the related matrix. These coefficients are computed recursively and the occurrence of a pair whose product equals one, corresponds to a singular leading principal submatrix. We shall see that this fact enables the order identification of ARMA models when to non hermitian Toeplitz matrices.

Let  $X$  be a random process with rational spectral density. The process  $X$  is said to be of minimal ( $p, q$ ) type if  $p$  and  $q$  are the degrees of the polynomials that appear in the canonical ARMA relation linking  $X$  and its innovation  $W$

$$\sum_{k=0}^p a_k X_{n-k} = \sum_{l=0}^q b_l W_{n-l} \quad (1)$$

The process  $X$  is of minimal  $(p, q)$  type if and only if its covariances satisfy a minimal  $(p, q)$  recursive identity (see [1]). This identity is equivalent to certain determinant conditions on a sequence of increasing matrices related to the covariances of  $X$ . Methods exist to verify these conditions. The classic one is the corner method [2] and others are based in the determination of the rank of these matrices by eigenvalues decomposition [1], [8], [5]. We express these conditions in terms of the generalized reflection coefficients of a sequence  $(R(n))_{n=0}^{\infty}$  of semi-infinite non Hermitian Toeplitz matrices related to the covariances of  $X$ . This method seems more convenient because the reflection coefficients are preserved for increasing matrices. Thus, at each step only one coefficient has to be computed for updating. The eigenvalues do not have this property.

The procedure obtained here for identifying the order of an ARMA model is recursive and stops at the  $(p+1)$ -th step. It does not require the inversion of any matrix nor the computation of eigenvalues.

## 1 Biorthogonal polynomials and reflection coefficients associated to semi-infinite matrices

A matrix  $M$  is called strongly regular when all its leading principal submatrices are nonsingular. Let  $M = (c_{i,j})_{i,j=0}^{\infty}$  be a semi-infinite strongly regular complex matrix. Denote by  $\mathbf{T}$  is the unit circle  $\mathbf{T} \cong [0, 2\pi[$ . Let  $\mathcal{P}$  be the subspace of  $L^2(\mathbf{T})$  spanned by  $\{\chi^k\}_{k=0}^{\infty}$ , where  $\chi^k(\theta) = e^{ik\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi[$ . Define the following complex-valued bilinear form  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  on  $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ ,

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \alpha_i c_{i,j} \beta_j \quad (2)$$

where  $P = \sum_{i=0}^n \alpha_i \chi^i$ ,  $Q = \sum_{j=0}^m \beta_j \chi^j$ . Observe that  $\langle \chi^i, \chi^j \rangle = c_{i,j}$ . Let  $\mathcal{P}_{k,l}$  be the subspace of polynomials spanned by  $(\chi^i)_{i=k}^l$  for  $0 \leq k < l \leq \infty$ . Let  $\Pi_{k,l}^L$  and  $\Pi_{k,l}^R$  be the 'left projection' and, respectively, the 'right projection' of  $\mathcal{P}$  onto  $\mathcal{P}_{k,l}$  defined by the following operators:

- (i) If  $k \leq s \leq l$  define  $\Pi_{k,l}^R(\chi^s) = \Pi_{k,l}^L(\chi^s) := \chi^s$
- (ii) If  $0 \leq s < k$  or  $l < s \leq \infty$  define

$$\Pi_{k,l}^L(\chi^s) := \sum_{m=k}^l a_m \chi^m$$

and

$$\Pi_{k,l}^R(\chi^s) := \sum_{m=k}^l b_m \chi^m$$

where  $(a_m)_{m=k}^l$  is the unique solution of the linear system

$$\langle \chi^s - \sum_{m=k}^l a_m \chi^m, \chi^j \rangle = 0 \quad \text{for all } k \leq j \leq l \quad (3)$$

$$\langle \chi^s - \sum_{m=k}^l a_m \chi^m, \chi^s - \sum_{m=k}^l a_m \chi^m \rangle = \langle \chi^s - \sum_{m=k}^l a_m \chi^m, \chi^s \rangle = \nu \quad (4)$$

and  $(b_m)_{m=k}^l$  is the unique solution of the linear system

$$\langle \chi^j, \chi^s - \sum_{m=k}^l b_m \chi^m \rangle = 0 \quad \text{for all } k \leq j \leq l \quad (5)$$

$$\langle \chi^s - \sum_{m=k}^l b_m \chi^m, \chi^s - \sum_{m=k}^l b_m \chi^m \rangle = \langle \chi^s - \sum_{m=k}^l b_m \chi^m, \chi^s \rangle = \nu. \quad (6)$$

These linear systems may be written in two different matricial forms:

$$[a_k, \dots, a_l, 1] M_{k,l,s} = [0, \dots, 0, \nu] \quad \text{and} \quad M_{k,l,s} [b_k, \dots, b_l, 1]^T = [0, \dots, 0, \nu]^T \quad (7)$$

or

$$[1, a_k, \dots, a_l] M_{s,k,l} = [\nu, 0, \dots, 0] \quad \text{and} \quad M_{s,k,l} [1, b_k, \dots, b_l]^T = [\nu, \dots, 0]^T \quad (8)$$

where the matrix  $M_{k,l,s}$  ( $M_{s,l,k}$ ) is obtained by adding  $[c_{s,k}, \dots, c_{s,l}, c_{s,s}]$  as last row (first row) and  $[c_{s,k}, \dots, c_{s,l}, c_{s,s}]^T$  as last column (first column) to the matrix  $M_{k,l} = (c_{i,j})_{i,j=k}^l$ . The matrices  $M_{k,l}$ ,  $0 \leq k \leq l < \infty$  are said to be the principal submatrices of  $M$ .

**Proposition 1** *The constant  $\nu$  that appears in the above equations may be written as*

$$\nu = \det(M_{k,l,s}) / \det(M_{k,l}). \quad (9)$$

**Proof.** Observe that the equation

$$[a_k, \dots, a_l, 1] M_{k,l,s} = [0, \dots, 0, \nu]$$

is equivalent to

$$[a_k/\nu, \dots, a_l/\nu, 1/\nu] = [0, \dots, 0, 1]M_{k,l,s}^{-1}.$$

This implies that  $1/\nu$  is the element on the right lower corner of  $M_{k,l,s}^{-1}$  which by definition is  $\det(M_{k,l})/\det(M_{k,l,s})$ . This ends the proof of the proposition.

◇

Observe that  $\nu$  may be negative, while in the positive definite case  $\nu$  is always positive.

**Proposition 2** *For all  $0 \leq j \leq k \leq l \leq m$ , the following identities hold:*

$$\Pi_{k,l}^L \circ \Pi_{j,m}^L = \Pi_{k,l}^L \quad (10)$$

$$\Pi_{k,l}^R \circ \Pi_{j,m}^R = \Pi_{k,l}^R. \quad (11)$$

**Proof.** We shall prove (10), the proof of (11) is analogous.

i) If  $k \leq s \leq l$ , then  $j \leq s \leq m$  and, by definition,

$$\Pi_{k,l}^L(\Pi_{j,m}^L(\chi^s)) = \Pi_{k,l}^L(\chi^s) = \chi^s.$$

ii) If  $0 \leq s < k$  or  $l < s \leq n$ , we may write

$$\Pi_{k,l}^L(\Pi_{j,m}^L(\chi^s)) = \Pi_{k,l}^L(\chi^s) - \Pi_{k,l}^L(\chi^s - \Pi_{j,m}^L(\chi^s))$$

then, it is enough to prove that  $\Pi_{k,l}^L(\chi^s - \Pi_{j,m}^L(\chi^s)) = 0$ . Let  $p = \chi^s - \Pi_{j,m}^L(\chi^s)$ , then, by definition,  $\langle p, \chi^r \rangle_c = 0$  for  $j \leq r \leq m$  and  $\langle p - \Pi_{k,l}^L(p), \chi^r \rangle_c = 0$  for  $k \leq r \leq l$  which imply that  $\langle \Pi_{k,l}^L(p), \chi^r \rangle_c = 0$  for  $k \leq r \leq l$ . Let  $\Pi_{k,l}^L(p) = \sum_{m=k}^l a_m \chi^m$ , then  $(a_m)_{m=k}^l$  is the solution of the linear system

$$\left\langle \sum_{m=k}^l a_m \chi^m, \chi^r \right\rangle_c = 0 \quad k \leq r \leq l \quad (12)$$

or in matricial form:  $(a_k, \dots, a_l)M_{k,l} = (0, \dots, 0)$ ,

where  $M_{k,l} = (c_{i,j})_{i,j=k}^l$ , since  $M$  is strongly regular, the matrix  $M_{k,l}$  is not singular and the unique solution to (12) is  $(a_k, \dots, a_l) = (0, \dots, 0)$ .

Then,  $\Pi_{k,l}^L(\chi^s - \Pi_{j,m}^L(\chi^s)) = 0$ . ◇

For each  $(k, l)$ ,  $0 \leq k < l \leq \infty$ , define the following polynomials:

$$P_{k,l}^L = \chi^k - \Pi_{k+1,l}^L(\chi^k), \quad P_{k,l}^R = \chi^k - \Pi_{k+1,l}^R(\chi^k) \quad (13)$$

$$Q_{k,l}^L = \chi^l - \Pi_{k,l-1}^L(\chi^l), \quad Q_{k,l}^R = \chi^l - \Pi_{k,l-1}^R(\chi^l). \quad (14)$$

**Proposition 3** *The two families of polynomials*

$$\{(Q_{k,r}^L)_{r=k}^l, (Q_{k,m}^R)_{m=k}^l\} \quad \text{and} \quad \{(P_{r,l}^L)_{r=k}^l, (P_{m,l}^R)_{m=k}^l\}$$

form two biorthogonal systems in  $\mathcal{P}_{k,l}$  for the bilinear form  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , i.e., they verify the following identities

$$\begin{aligned} \langle Q_{k,r}^L, Q_{k,m}^R \rangle &= \nu_{k,r} \quad \text{if } r = m \\ &= 0 \quad \text{if } r \neq m \end{aligned} \quad (15)$$

and

$$\begin{aligned} \langle P_{r,l}^L, P_{m,l}^R \rangle &= \mu_{r,l} \quad \text{if } r = m \\ &= 0 \quad \text{if } r \neq m \end{aligned} \quad (16)$$

The constants  $\nu_{k,r}$  and  $\mu_{r,l}$  are defined as in (9).

**Proof.** Only (15) shall be proved. The proof of (16) is analogous.

The polynomials  $Q_{k,r}^L$  and  $Q_{k,m}^R$  belong to  $\mathcal{P}_{k,r}$  and, respectively, to  $\mathcal{P}_{k,m}$ , but they can be considered as polynomials in  $\mathcal{P}_{k,l}$  making their last  $(l-r)$  and, respectively,  $(l-m)$  coefficients equal to zero. Then, from (2), one may write

$$\langle Q_{k,r}^L, Q_{k,m}^R \rangle = [a_k, \dots, a_{r-1}, 1, 0, \dots, 0] M_{k,l} [b_k, \dots, b_{m-1}, 1, 0, \dots, 0]^T$$

where by the definition

$$\begin{aligned} [a_k, \dots, a_{r-1}, 1] M_{k,r} &= [0, \dots, 0, \nu_{k,r}] \\ M_{k,m} [b_k, \dots, b_{m-1}, 1]^T &= [0, \dots, 0, \nu_{k,m}]^T. \end{aligned}$$

Observe that

$$[a_k, \dots, a_{r-1}, 1, 0, \dots, 0] M_{k,l} = [0, \dots, 0, \nu_{k,r}, *, \dots, *] \quad (17)$$

$$M_{k,l} [b_k, \dots, b_{m-1}, 1, 0, \dots, 0]^T = [0, \dots, 0, \nu_{k,m}, *, \dots, *]^T \quad (18)$$

where the \*'s are any complex numbers. Then,

i) if  $r = m$ , from (17) one has

$$\langle Q_{k,r}^L, Q_{k,m}^R \rangle = [0, \dots, 0, \nu_{k,r}, *, \dots, *] [b_k, \dots, b_{r-1}, 1, 0, \dots, 0]^T = \nu_{k,r}$$

ii) if  $r > m$ , from (17) one has

$$\langle Q_{k,r}^L, Q_{k,m}^R \rangle = [0, \dots, 0, \nu_{k,r}, *, \dots, *] [b_k, \dots, b_{m-1}, 1, 0, \dots, 0]^T = 0.$$

iii) if  $r < m$ , from (18) one has

$$\langle Q_{k,r}^L, Q_{k,m}^R \rangle = [a_k, \dots, a_{r-1}, 1, 0, \dots, 0][0, \dots, 0, \nu_{k,m}, *, \dots, *]^T = 0$$

and the proposition is proved.  $\diamond$ .

A recurrence relation for these polynomials is given by the next theorem.

**Theorem 1** *Given a semi-infinite strongly regular matrix  $M = (c_{i,j})_{i,j=0}^{\infty}$ , for each  $(k,l)$ ,  $0 \leq k < l \leq \infty$ , there exist two ordered pairs of complex numbers  $(\rho_{k,l}, \rho'_{k,l})$  and  $(\lambda_{k,l}, \lambda'_{k,l})$ , called respectively left and right general reflection coefficients, such that*

$$P_{k,l}^L = P_{k,l-1}^L - \rho_{k,l} Q_{k+1,l}^L \quad (19)$$

$$Q_{k,l}^L = Q_{k+1,l}^L - \rho'_{k,l} P_{k,l-1}^L \quad (20)$$

and

$$P_{k,l}^R = P_{k,l-1}^R - \lambda_{k,l} Q_{k+1,l}^R \quad (21)$$

$$Q_{k,l}^R = Q_{k+1,l}^R - \lambda'_{k,l} P_{k,l-1}^R. \quad (22)$$

**Proof.** The projection  $\Pi_{k+1,l}^L(\chi^k)$  may be written as

$$\Pi_{k+1,l}^L(\chi^k) = S_{k+1,l-1} + b\chi^l \quad (23)$$

where  $S_{k+1,l-1} \in \mathcal{P}_{k+1,l-1}$  and  $b$  a complex number. Since  $k+1 \leq k+1 \leq l-1 \leq l$  from (10) it follows  $\Pi_{k+1,l-1}^L \circ \Pi_{k+1,l}^L = \Pi_{k+1,l-1}^L$ . Thus, applying  $\Pi_{k+1,l-1}^L$  to (23) one obtains:

$$\Pi_{k+1,l-1}^L(\chi^k) = S_{k+1,l-1} + b\Pi_{k+1,l-1}^L(\chi^l).$$

Then, replacing  $S_{k+1,l-1}$  in (23), leads to

$$\Pi_{k+1,l}^L(\chi^k) = \Pi_{k+1,l-1}^L(\chi^k) + b(\chi^l - \Pi_{k+1,l-1}^L(\chi^l)).$$

Multiplying this identity by  $-1$  and adding  $\chi^k$  yields

$$\chi^k - \Pi_{k+1,l}^L(\chi^k) = \chi^k - \Pi_{k+1,l-1}^L(\chi^k) - b(\chi^l - \Pi_{k+1,l-1}^L(\chi^l)).$$

Setting  $b = \rho_{k,l}$  finishes the proof of (19). The proof of (20), (21) and (22) are analogous.  $\diamond$

The following lemma gives formulas for computing recursively, the two triangular arrays of general reflection coefficients:

**Lemma 1** For each  $(k, l)$ ,  $0 \leq k < l \leq n$ , the following statements hold:

$$\rho_{k,l} = \frac{\langle P_{k,l-1}^L, \chi^l \rangle}{\nu_{k+1,l}} \quad (24)$$

$$\rho'_{k,l} = \frac{\langle Q_{k+1,l}^L, \chi^k \rangle}{\mu_{k,l-1}} \quad (25)$$

$$\lambda_{k,l} = \frac{\langle \chi^l, P_{k,l-1}^R \rangle}{\nu_{k+1,l}} \quad (26)$$

$$\lambda'_{k,l} = \frac{\langle \chi^k, Q_{k+1,l}^R \rangle}{\mu_{k,l-1}} \quad (27)$$

$$\mu_{k,l} = c_{k,k} \prod_{j=k+1}^l (1 - \rho_{k,j} \rho'_{k,j}) \quad (28)$$

$$\nu_{k,l} = c_{l,l} \prod_{j=k}^{l-1} (1 - \rho_{j,l} \rho'_{j,l}) \quad (29)$$

$$\rho_{k,l} \cdot \rho'_{k,l} = \lambda_{k,l} \lambda'_{k,l} \quad (30)$$

**Proof.** Note that by definition  $\langle P_{k,l}^L, \chi^l \rangle = 0$ , thus, taking the bilinear form with  $\chi^l$  at both righth sides of (19) yields

$$0 = \langle P_{k,l-1}^L, \chi^l \rangle - \rho_{k,l} \langle Q_{k+1,l}^L, \chi^l \rangle.$$

Since  $\langle Q_{k,l}^L, \chi^l \rangle = \langle Q_{k,l}^L, Q_{k,l}^R \rangle = \nu_{k,l}$ , the proof of (24) is finished. The proof of (25), (26) and (27) are analogous taking at both righth sides of (20) the bilinear form with  $\chi^k$  and taking at both left sides of (21) and (22) the bilinear form with  $\chi^l$  and, respectively, with  $\chi^k$ .

For proving (28), observe that taking the bilinear form with  $\chi^k$  at both righth sides of (19) yields

$$\langle P_{k,l}^L, \chi^k \rangle = \langle P_{k,l-1}^L, \chi^k \rangle - \rho_{k,l} \langle Q_{k+1,l}^L, \chi^k \rangle,$$

which implies

$$\mu_{k,l} = \mu_{k,l-1} - \rho_{k,l} \langle Q_{k+1,l}^L, \chi^k \rangle.$$

Thus, we may write,

$$\mu_{k,l} = \mu_{k,l-1} \left( 1 - \rho_{k,l} \frac{\langle Q_{k+1,l}^L, \chi^k \rangle}{\mu_{k,l-1}} \right)$$



which, from (25), may be written as

$$\mu_{k,l} = \mu_{k,l-1}(1 - \rho_{k,l}\rho'_{k,l}). \quad (31)$$

Replacing in (31)  $\mu_{k,l-1}$  by  $\mu_{k,l-2}(1 - \rho_{k,l-1}\rho'_{k,l-1})$  and so on, yields (28). The proof of (29) is analogous taking the bilinear form with  $\chi^l$  at both right sides of (20).

Finally, taking the bilinear form with  $\chi^k$  at both left sides of (21) leads to

$$\mu_{k,l} = \mu_{k,l-1}(1 - \lambda_{k,l}\lambda'_{k,l}).$$

Comparing with (31) yields (30). This ends the proof of the Lemma.  $\diamond$

### UDL factorization

Let  $M$  be an strongly regular semi-infinite matrix. In this section we will obtain *UDL* factorizations for the inverse of the leading principal submatrices of  $M$ , where  $U$  is an unit (with ones in the main diagonal) upper triangular matrix,  $L$  is an unit lower triangular matrix and  $D$  is a diagonal matrix. Let  $\mathbf{p}$  and  $\mathbf{q}$  denote the column vectors of the coefficients of the polynomials  $P$  and, respectively,  $Q$ . For  $0 \leq k < l \leq \infty$ , define the following unit upper triangular matrices in terms of their column vectors:

$$L_{k,l} = [\mathbf{q}_{k,k}^L, \mathbf{q}_{k,k+1}^L, \dots, \mathbf{q}_{k,l}^L] \quad \text{and} \quad R_{k,l} = [\mathbf{q}_{k,k}^R, \mathbf{q}_{k,k+1}^R, \dots, \mathbf{q}_{k,l}^R].$$

**Proposition 4** For  $0 \leq k \leq l \leq \infty$ , the matrices  $D_{k,l}$  defined by  $D_{k,l} = (L_{k,l})^T M_{k,l} R_{k,l}$  are diagonal matrices with  $D_{k,l}(i, i) = \nu_{k,i}$ .

**Proof.** From the definition the matrix  $D_{k,l}$  may be written as

$$D_{k,l} = \begin{bmatrix} \langle Q_{k,k}^L, Q_{k,k}^R \rangle & \langle Q_{k,k}^L, Q_{k,k+1}^R \rangle & \cdots & \langle Q_{k,k}^L, Q_{k,l}^R \rangle \\ \langle Q_{k,k+1}^L, Q_{k,k}^R \rangle & \langle Q_{k,k+1}^L, Q_{k,k+1}^R \rangle & \cdots & \langle Q_{k,k+1}^L, Q_{k,l}^R \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle Q_{k,l}^L, Q_{k,k}^R \rangle & \langle Q_{k,l}^L, Q_{k,k+1}^R \rangle & \cdots & \langle Q_{k,l}^L, Q_{k,l}^R \rangle \end{bmatrix}.$$

Observe that  $\langle Q_{k,k}^L, Q_{k,k}^R \rangle = \langle \chi^k, \chi^k \rangle = c_{k,k}$  and from Proposition 3 the last matrix is a diagonal matrix with diagonal elements  $(c_{k,k}, \nu_{k,k+1}, \dots, \nu_{k,l})$ . This ends the proof of the Proposition.  $\diamond$

The following *UDL* factorization for  $M_{k,l}^{-1}$  is immediately obtained from proposition (4)

$$M_{k,l}^{-1} = R_{k,l}(D_{k,l})^{-1}(L_{k,l})^T. \quad (32)$$

Observe that (32) gives *UDL* factorizations for the inverse all principal submatrices of  $M$ .

**Determinant Formula**

The matrices  $R_{k,l}$  and  $L_{k,l}$  are unit upper triangular, so that their determinants equal one. Hence, the following determinant formula follows immediately from (28), (29) and (32):

**Proposition 5** *For any strongly regular matrix  $M$ , the following determinant formula holds for its principal submatrices, in terms of the general reflection coefficients of  $M$  :*

$$Det(M_{k,l}) = c_{k,k}c_{k+1,k+1}\dots c_{l,l} \prod_{0 \leq k < l \leq n} (1 - \rho_{k,l} \cdot \rho'_{k,l}).$$

**Remark** The occurrence of the first singular principal submatrix  $M_{k,l}$  is equivalent to the occurrence of a pair  $(\rho_{k,l}, \rho'_{k,l})$  such that  $\rho_{k,l} \cdot \rho'_{k,l} = 1$ .

From now on, only one triangular array of general reflection coefficients is considered because it is sufficient for computing the determinant of all principal submatrices.

**2 Toeplitz case**

Assume now that  $M$  is a semi-infinite Toeplitz matrix non necessarily Hermitian. Observe that for each  $n = 0, 1, 2, \dots$ , all the principal submatrices  $M_{k,l}$  such that  $l - k = n$  are identical.

The structure of the left triangular array of coefficients associated to a Toeplitz matrix is such that the pairs  $(\rho_{k,l}, \rho'_{k,l})$  are identical along each diagonal  $l - k = n$ . Thus, they are determined by a sequence of pair of complex numbers  $(\rho_k, \rho'_k)_{k=0}^\infty$ , where  $\rho_k = \rho_{0,k}$ ,  $\rho'_k = \rho'_{0,k}$ .

The following Corollary of Proposition 5 plays a key technical role.

**Corollary 1** *Let  $M = (c_{i,j})_{i,j=0}^\infty$  be a Toeplitz matrix non necessarily Hermitian, let  $(\rho_k, \rho'_k)_{k=1}^\infty$  be its left general reflection coefficients and let  $M_n = (c_{i,j})_{i,j=0}^n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , be its leading submatrices. Then the following propositions hold:*

1. A determinant formula for  $M_n$ ,

$$Det(M_n) = c_{0,0}^n \prod_{k=1}^n (1 - \rho_k \cdot \rho'_k)^{n-k+1}. \tag{33}$$

2.  $Det(M_n) \neq 0$  if and only if  $\rho_k \cdot \rho'_k \neq 1$  for all  $k = 1, 2, \dots, n$ .

3. The occurrence of the first pair  $(\rho_m, \rho'_m)$  such that  $\rho_m \cdot \rho'_m = 1$  corresponds to the occurrence of the first singular leading submatrix  $M_m$ .

### 3 Application to order identification of ARMA models

Let  $X = (X_n)_{n \in \mathbf{Z}}$  be a stationary random process with rational spectral density. The canonical ARMA relation linking  $X$  and its innovation  $W$  may be written as

$$\sum_{k=0}^p a_k X_{n-k} = \sum_{l=0}^q b_l W_{n-l} \quad (34)$$

with  $P(z) = \sum_{k=0}^p a_k z^k$  and  $Q(z) = \sum_{l=0}^q b_l z^l$  coprimes, all the roots of  $P$  are outside the closed unit disk, all the roots of  $Q$  are outside the open unit disc and  $a_0 = b_0 = 1$ ,  $a_p \neq 0$ ,  $b_q \neq 0$ . The process  $X$  is said of minimal type  $(p, q)$ .

Let  $\{r_m\}_{m \in \mathbf{Z}}$  be the sequence of covariances of  $X$ , and let  $R$  be the semi-infinite Toeplitz matrix associated to the covariances,  $R = (c_{i,j} = r_{j-i})_{i,j=0}^{\infty}$ . For each natural number  $q$  define  $R(q)$  as the semi-infinite non Hermitian Toeplitz matrix that remains after deleting the first  $q$  columns of  $R$ .

$$R(q) = \begin{bmatrix} r_q & r_{q+1} & \cdots \\ r_{q-1} & r_q & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

For being consistent with the notation in the literature, denote, for  $p = 1, 2, 3, \dots$ ,

$$R(p, q) = R(q)_{0,p-1} = \begin{bmatrix} r_q & r_{q+1} & \cdots & r_{q+p-1} \\ r_{q-1} & r_q & \cdots & r_{q+p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{q-p+1} & r_{q-p+2} & \cdots & r_q \end{bmatrix}.$$

A numerical sequence  $\{r_m\}_{m \in \mathbf{Z}}$  satisfies a  $(p, q)$  recursive identity if there exist numbers  $\alpha_0, \dots, \alpha_p$  with  $\alpha_0 = 1$  such that

$$\alpha_0 r_m + \alpha_1 r_{m-1} + \dots + \alpha_{m-p} = 0 \quad \text{for } m \geq q + 1.$$

The sequence  $\{r_m\}_{m \in \mathbf{Z}}$  satisfies a minimal  $(p, q)$  recursive identity if it satisfies the  $(p, q)$  recursive identity and if it satisfies another  $(p', q')$  recursive identity, then  $p' \geq p$  and  $q' \geq q$ .

The process  $X$  is of minimal  $(p, q)$  type if and only if its covariances satisfy a minimal  $(p, q)$  recursive identity. This identity is equivalent to the following determinant conditions (see [1] chap.10 5.3 (iii)):

$$\text{Det}(R(p + 1, n)) = 0 \text{ for } n > q \tag{35}$$

$$\text{Det}(R(p + 1, q)) \neq 0 \tag{36}$$

$$\text{Det}(R(p, q + 1)) \neq 0. \tag{37}$$

Let  $\{(\rho_k(n), \rho'_k(n))\}_{n \in \mathbf{Z}}$  be the sequence of pairs of left general reflection coefficients associated to  $R(n)$ .

The following theorem is the principal result of this paper. It gives a simple recursive procedure for identifying the order of an ARMA model.

**Theorem 2** *Let  $X$  be a process with rational spectral density. Then the process  $X$  is of minimal type  $(p, q)$  if and only if the following two conditions are fulfilled*

1. *The general reflection coefficients associated to the matrices  $R(n), n > q$ , are such that*

$$\rho_i(n) \cdot \rho'_i(n) \neq 1 \text{ for } 1 \leq i \leq p - 1 \text{ and } \rho_p(n) \cdot \rho'_p(n) = 1.$$

2. *The general reflection coefficients associated to the matrix  $R(q)$  are such that*

$$\rho_i(q) \cdot \rho'_i(q) \neq 1 \text{ for } 1 \leq i \leq p.$$

**Proof.** It shall be proved that conditions 1 and 2 are equivalent to conditions (35), (36) and (37). From Corollary 1, if  $\rho_p(n) \cdot \rho'_p(n) = 1$  for  $n > q$  then

$$\text{Det}(R(p + 1, n)) = 0 \text{ for } n > q$$

which is precisely condition (35). Moreover,  $\rho_i(q + 1) \cdot \rho'_i(q + 1) \neq 1$  for  $1 \leq i \leq p$  is equivalent to the condition (37). Finally,  $\rho_i(q) \cdot \rho'_i(q) \neq 1$  for  $1 \leq i \leq p$  if and only if  $\text{Det}(R(p + 1, q)) \neq 0$  i.e., condition (36).

It remains to prove that (35) and (37) imply condition 1 of Theorem 2. Observe that

$$\text{Det}(R(p + 1, q + 1)) = 0 \text{ and } \text{Det}(R(p, q + 1)) \neq 0 \implies \text{Det}(R(p, q + 2)) \neq 0$$

(see [1] chap.10). An inductive procedure yields condition 1 of the Theorem.

◇

## Referencias

- [1] Azencott, R.; Dacuhna-Castelle, D. (1986) *Series of Irregular Observations*. Springer Verlag, Berlin.
- [2] Beghin, B.; Gourieroux, Ch.; Montfort, A. (1979) "Identification of ARMA models, the corner method", in *Time Series*, O. Anderson (ed.), North-Holland, Amsterdam.
- [3] Castro, G.; Seghier, A. (1996) "Schur-Szegö coefficients for positive definite Hermitian forms and orthogonal polynomials", *C.R. Sci. Paris*, t.332, Série 1: 1129–1134.
- [4] Castro, G.; Seghier, A. (1997) "Short recurrence relation for biorthogonal polynomials", *C.R. Sci. Paris*, to appear.
- [5] Chan, Y. T.; Wood, J.C. (1984) "A new order determination technique for ARMA processes", *IEEE Trans. Acoust. Speech, Sig.*
- [6] Kailath, T.; Vieira, A.; Morf M. (1978) "Inverses of Toeplitz operators, innovations, and orthogonal polynomials", *SIAM Review* **20**: 106–119.
- [7] Levinson, N. (1947) "The Wiener RMS (root-mean-square) error criterion in filter design and prediction", *J. Math. Anal. Phys.* **25**: 261–278.
- [8] Stoica, P. (1981) "On a procedure for testing the orders of time series", *IEEE Trans. Automat. Contr.* **26**: 572–573.

TEOREMA CENTRAL DEL LMITE PARA MEDIDAS  
MARTINGALES CON VALORES EN UN ESPACIO  
DE HILBERT

HÉCTOR PINTO CONTRERAS \*

---

**Resumen**

Algunos Teoremas Centrales del Límite son demostrados para medidas martingalas localmente de cuadrado integrables, con valores en un Espacio de Hilbert.

**Palabras clave:** Martingala valuada Hilbert, Teorema Central del Lmite, medidas martingalas.

**Abstract**

Central Limit Theorems are proved for martingale measures locally of squares integrables with value in a Hilbert Space.

**Keywords:** Hilbert valued martingale, Central Limit Theorem, martingale measures.

---

\*Departamento de Matemáticas , Universidad Tecnológica Metropolitana. Santiago. Chile

## Introducción

Criterios de tensión para procesos estocásticos cadlái con valores en un Espacio de Hilbert han sido dado por Métivier y Nakao (1987). Utilizando estos resultados, vía Teorema de Prokhorov, Xie (1995) , demuestra teoremas de convergencia de medidas martingalas con valores en un Espacio de Hilbert. Como aplicación de los resultados señalados, se demuestran Teoremas Central del Límite donde las variables aleatorias son medidas martingalas de cuadrados integrables con valores en un Espacio de Hilbert y la suma de ellas converge a la ley de un “ruido blanco”. En la primera parte se presentan los resultados que se utilizarán posteriormente, sobre medidas martingalas introducidas por Walsh (1986) y sobre criterios de tensión para martingalas con valores en un Espacio de Hilbert dados por Xie.

## 1 Definiciones y propiedades previas

**Definición 1.1.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  una base estocástica satisfaciendo las “condiciones habituales”,  $M : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{A} \rightarrow H$ ,  $H$  espacio de Hilbert, real, separable,  $\mathcal{A}$  subanillo de  $\mathcal{B}(E)$  la  $\sigma$ -álgebra de Borel sobre  $E$ ,  $(E, \mathcal{E})$  un espacio de Lusín, se llama una medida  $\mathcal{F}_t$ -martingala,  $H$ -valorada si se tiene:

1. Para cada  $A \in \mathcal{A}$ ,  $M(A) = \{M_t(A), t \geq 0\}$  es una  $\mathcal{F}_t$ -martingala al principio cero.
2. Para  $t > 0$ ,  $M_t(\cdot)$  es una medida  $\sigma$ -finita,  $L_H^2$ -valorada, es decir:
  - a)  $M_t(\cdot)$  está definida en  $\Omega \times \mathcal{A}$  y con valores en  $H$ .
  - b)  $M_t(A) \in L_H^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \forall A \in \mathcal{A}$  o también  $\|M_t(A)\|_2^2 = E \left[ \|M_t(A)\|^2 \right] = \int_{\Omega} M_t(A) d\mathbb{P} < \infty, \quad \forall A \in \mathcal{A}$ .
  - c) Existe una sucesión creciente  $\{E_n\}_{n \geq 1}$  de subconjuntos de  $E$  tal que:
    - i)  $\cup_n E_n = E$
    - ii)  $\forall n, \mathcal{E}_n = \mathcal{E}/E_n \subseteq \mathcal{A}$
    - iii)  $\sup \{\|M_t(A)\|_2, A \in \mathcal{E}_n\} < \infty$  (es decir,  $M_t(\cdot)$  es  $\sigma$ -finita).

- d)  $M_t(\cdot)$  es contablemente aditiva, o sea, para cada  $n$ , cada sucesión  $\{A_j\}$  de  $\mathcal{E}_n$  decreciente a  $\phi$  cumple que  $\|M_t(A_j)\|_2$  tiende a cero.
- 3.  $A \cap B = \phi \Rightarrow M(A)$  y  $M(B)$  son martingalas ortogonales, para todo  $A$  y  $B$  en  $\mathcal{A}$ .
- 4. Una medida  $M$ ,  $H$ -valorada, se dice ser continua (cadlai), si  $\forall A \in \mathcal{A}$ , la aplicación  $t \rightarrow M_t(A)$  es continua (cadlai).
- 5. Para cada  $A \in \mathcal{A}$  (fijo, cualquiera), a la martingala  $M(A) = \{M_t(A), t \geq 0\}$  se le asocia un único proceso creciente adaptado previsible  $\langle M(A), M(A) \rangle$  llamado la **variación cuadrática previsible de  $M(A)$** .

**Definición 1.2.** Sean  $H$  espacio de Hilbert real separable con producto interno  $x \cdot y$  y norma  $\|\cdot\|$ ,  $\{e_n\}_{n \geq 1}$  una base ortonormal de  $H$ .

$$H \hat{\otimes}_1 H = \left\{ y : y = \sum_{i,j} \lambda_{ij} e_i \otimes e_j, \|y\|_1 = \sum_{i,j} |\lambda_{ij}| < \infty \right\}$$

el espacio nuclear de Banach con norma  $\|\cdot\|_1$  también denotado por  $\mathcal{L}_1(H, H)$ ,

$$H \hat{\otimes}_2 H = \left\{ y : y = \sum_{i,j} \lambda_{ij} e_i \otimes e_j, \sum_{i,j} \lambda_{ij}^2 < \infty \right\}$$

el espacio de Hilbert, con norma  $\|y\|_2 = \left( \sum_{i,j} \lambda_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ , llamado espacio de Hilbert-Schmidt también denotado por  $\mathcal{L}_2(H, H)$ .

Sea  $M$  una martingala cuadrado integrable  $H$ -valorada. Por  $\langle\langle M \rangle\rangle$  se denota el único proceso predecible  $\mathcal{L}_1(H, H)$ -valorado (salvo indistinguibilidad) tal que  $M^{\otimes 2} - \langle\langle M \rangle\rangle$  es una  $\mathcal{L}_1(H, H)$ -martingala, donde además se tiene que  $\langle M, M \rangle = \langle M \rangle = \text{traza de } \langle\langle M \rangle\rangle$  y  $\langle\langle M \rangle\rangle_t = \int_0^t Q_M d \langle M \rangle$  donde

$Q_M$  es un proceso predecible  $H \hat{\otimes}_1 H$ -valorado. También existe un único (salvo indistinguibilidad) proceso cadlai  $H \hat{\otimes}_1 H$ -valorado, denotado por  $[[M]]$  llamado el tensor cuadrático de  $M$  y es tal que (i)  $M^{\otimes 2} - [[M]]$  es una martingala  $H \hat{\otimes}_1 H$ -valorada y (ii)  $[[M]] = \langle\langle M^c \rangle\rangle + \sum_{s \leq \cdot} (\Delta M_s)^{\otimes 2} = [[M^c]] + \sum_{s \leq \cdot} (\Delta M_s)^{\otimes 2}$  P-c.s.



**Definición 1.3.** Una medida martingala  $M$ ,  $H$ -valorada, se dice ser ortogonal si, para cualquier par de conjuntos disjuntos  $A$  y  $B$  en  $\mathcal{A}$  se tiene que  $\langle\langle M(A), M(B) \rangle\rangle = 0$ .

Una medida martingala  $M$ ,  $H$ -valorada, se dice ser estrictamente ortogonal si, para cualquier par de conjuntos disjuntos  $A$  y  $B$  en  $\mathcal{A}$  se tiene que  $[[M(A), M(B)]] = 0$ .

Por Walsh (1986) se puede concluir que, al proceso creciente previsible  $\langle M(A), M(A) \rangle_t$  se le asocia una medida aleatoria  $\nu$  también previsible definida en  $\Omega \times \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{A}$  de la siguiente manera:  $\langle M(A), M(A) \rangle_t(\omega) = \langle M(A) \rangle_t(\omega) = \nu(\omega, A \times [0, t])$ . Si  $M$  es continua,  $\nu$  es continua, es decir,  $\nu(\{t\} \times E_n) = 0, \forall t > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . La medida  $\nu$  es llamada la intensidad de  $M$  y se tiene que,  $\forall A, B \in \mathcal{A}, \forall t > 0, \langle M(A), M(B) \rangle_t = \langle M(A \cap B) \rangle_t = \nu((0, t] \times A \cap B)$   $\mathbf{P}$ -c.s. Así, la medida  $\nu$  caracteriza completamente toda la variación cuadrática de la medida martingala  $M$ . Análogamente al proceso previsible  $\langle\langle M(A) \rangle\rangle_t$  se le asocia el positivo, simétrico proceso  $Q(s, x)$ ,  $\mathcal{P} \times \mathcal{A}$ -medible,  $H \hat{\otimes}_1 H$ -valorado tal que  $\int_0^t \int_E Q(s, x) \nu(ds, dx)$  es predecible y satisface que  $\int_0^t \int_E Q(s, x) \nu(ds, dx) = \langle\langle M(A) \rangle\rangle_t = \bar{\nu}(A \times [0, t])$ ,  $\mathbf{P}$ -c.s.

$\forall A \in \mathcal{A}$  y  $\forall t > 0$ , donde  $\mathcal{P}$  es la  $\sigma$ -álgebra predecible y por lo tanto  $\nu = tr \bar{\nu}$ . Además si  $M$  es una medida  $\mathcal{F}_t$ -martingala estrictamente ortogonal entonces existen, una medida aleatoria positiva  $\sigma$ -finita,  $\mu(ds, dx)$  y una medida positiva simétrica  $H \hat{\otimes}_1 H$ -valorada  $\mathcal{F}_t$ -opcional,  $\bar{\mu}(ds, dx)$  tal que  $\forall A \in \mathcal{A}$  los procesos  $(\mu([0, t] \times A))_{t \geq 0}$  y  $(\bar{\mu}([0, t] \times A))_{t \geq 0}$  son opcionales y satisfacen  $\mu([0, t] \times A) = [M(A)]_t$ ,  $\bar{\mu}([0, t] \times A) = [[M(A)]]_t$ ,  $\mathbf{P}$ -c.s.  $\forall A \in \mathcal{A}, \forall t > 0$  y  $\nu, \bar{\nu}$  son respectivamente, las proyecciones duales de  $\mu$  y  $\bar{\mu}$ .

**Teorema 1.4.** (Teorema 3.6. de Xie (1995)). Supongamos que  $X^n - X_0^n$  es una martingala localmente de cuadrado integrable en  $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathcal{F}_t^n, \mathbf{P}^n)$  para cada  $n$ . Entonces para que la sucesión  $\{X^n\}_{n \geq 1}$  sea tensa, es suficiente que:

- (i) la sucesión  $\{X_0^n\}_{n \geq 1}$  sea tensa (en  $H$ );
- (ii) la sucesión  $\{\langle\langle X^n \rangle\rangle\}_{n \geq 1}$  sea  $C$ -tensa  $\left(\text{en } D\left(H \hat{\otimes}_1 H\right)\right)$ , donde  $D\left(H \hat{\otimes}_1 H\right)$

es el espacio de Skorokhod de las funciones cadlai con valores en  $\hat{H}_{\otimes 1}^{\wedge} H$  y  $C$ -tensión significa que los limites puntuales de la sucesión de leyes asociada a la sucesión, son leyes de procesos continuos.

## 2 Principales resultados

El Teorema de Prokhorov establece que en un espacio métrico arbitrario, tensión implica relativa compacidad, cumpliéndose la equivalencia si el espacio métrico es Polaco. En el esquema de Billingsley (1968), relativa compacidad más convergencia débil de las distribuciones finito dimensional implica convergencia débil en espacio de funciones. Además, la convergencia débil se puede expresar en términos de convergencia en distribución. Por lo tanto:

**Definición 2.1.**(Definición 5.1 de Xie). Sean  $M^n$  y  $M$  medidas martingalas  $H$ -valoradas. Se dice que  $M^n$  converge a  $M$  en distribución y se escribe  $M^n \xrightarrow{L} M$  si para cada  $f \in C_b(\mathbb{R}_+ \times E)$ ,

$$\int_0 \int_E f(s, x)M^n(ds, dx) \xrightarrow{L} \int_0 \int_E f(s, x)M(ds, dx).$$

Por otra parte, El Karoui y Méléard demuestran la existencia de una medida martingala llamada “ruido blanco” que cumple un rol similar al del movimiento Browniano en la teoría de las martingalas continuas, ellos definen:

**Definición 2.2.**Cuando la medida  $\mu$  es continua, la familia  $\{B_t(A), t \geq 0, A \in \mathcal{A}\}$ , que es una medida martingala, por lo tanto también continua, se llama ruido blanco con intensidad (determinista)  $\mu$ . Donde  $B_t(A) = W((0, t] \times A)$ ,  $W$  medida Gaussiana centrada en  $(\mathbb{R}_+ \times E, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E}, \mu)$ ,  $\mu$  medida positiva  $\sigma$ -finita en  $\mathbb{R}_+ \times E$ , definida por:

$$E(\exp W(h)) = \exp\left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+ \times E} h^2(y)\mu(dy)\right), \quad \forall h \in L_{\mu}^2.$$

Además (Proposición II-3 de El Karoui, Méléard), si  $\{M_t(A), t \geq 0, A \in \mathcal{A}\}$  es una medida  $\mathcal{F}_t$  – *martingala* con una intensidad determinista continua  $\nu$ , entonces  $M$  es un ruido blanco (respecto a su filtración natural).

Del Teorema 1.4 tenemos el siguiente corolario:

**Corolario 2.3.** Sea  $\{M^n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de medidas martingalas de cuadrado integrable. Si  $\forall A \in \mathcal{A}, \{\langle\langle M^n(A) \rangle\rangle\}_{n \geq 1}$  es  $C$ -tensa, entonces

$\{M^n\}_{n \geq 1}$  es tensa.

**Demostración.** Como  $\forall A \in \mathcal{A}$ , y  $\forall n$ ,  $M^n(A)$  es una martingala al principio cero de cuadrado integrable, entonces al ser  $\{\langle\langle M^n(A) \rangle\rangle\}_{n \geq 1}$   $C$ -tensa,  $\forall A \in \mathcal{A}$ , por el Teorema 1.4,  $\{M^n(A)\}_{n \geq 1}$  es tensa  $\forall A \in \mathcal{A}$ , es decir,  $\{M^n\}$  es tensa.

**Teorema 2.4.** Sea  $B = \{B_t(A), t \geq 0, A \in \mathcal{A}\}$  un ruido blanco  $H$ -valorado y  $\{M^n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de medidas martingalas  $H$ -valoradas localmente de cuadrados integrables. Supongamos que  $\forall t \geq 0$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $f \in C_b(\mathbb{R}_+ \times E)$

$$\int_0^t \int_{\mathcal{M}(E)} \| \int_E f(s, x) y(dx) \|^2 I_{\{ \| \int_E f(s, x) y(dx) \| > \varepsilon \}} \beta^n(ds, dy) \xrightarrow[n]{\mathcal{P}} 0 \quad (1)$$

donde  $\beta^n$  es la proyección dual de las medidas aleatorias asociadas a los saltos de  $M^n$  y  $\mathcal{M}(E)$  son las medidas aleatorias en  $\mathcal{B}(E)$ .

Si

$$(i) \forall A \in \mathcal{A} \text{ y } \forall t \in \mathbb{R}_+, \langle\langle M^n(A) \rangle\rangle_t \xrightarrow[n]{\mathcal{P}} \langle\langle B(A) \rangle\rangle_t = \bar{\mu}([0, t] \times A)$$

$$(o, \forall A \in \mathcal{A} \text{ y } \forall t \in \mathbb{R}_+, \|M^n(A)\|_t \xrightarrow[n]{\mathcal{P}} \langle\langle B(A) \rangle\rangle_t = \bar{\mu}([0, t] \times A) \text{ y}$$

$$(ii) \forall f \in C_b(\mathbb{R}_+ \times E), g \in C_0^+(H), t > 0, \int_0^t \int_{\mathcal{M}(E)} g(\int_E f(s, x) y(dx)) \beta^n(ds, dy) \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$$

donde  $C_0^+(H)$  es el espacio de las funciones continuas,  $g \geq 0$  acotadas en  $H$  y tal que  $g(x) = 0$  para  $\|x\| \leq a$ ,  $\|x\| > b$  para algún  $0 < a < b$ , entonces

$$M^n \xrightarrow{\mathcal{L}} B \circ \int_0^\cdot \int_E f(s, x) M^n(ds, dx) \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^\cdot \int_E f(s, x) B(ds, dx), \quad \forall f \in C_b(\mathbb{R}_+ \times E).$$

**Demostración.** Sean:

$X^n = \int_0^\cdot \int_E f(s, x) M^n(ds, dx)$  y  $X = \int_0^\cdot \int_E f(s, x) B(ds, dx)$  entonces los  $X^n$  son martingalas cuadrados integrables y  $X$  es una martingala Gaussiana continua con característica  $(0, \mu, 0)$  y con valores en  $H$ . Como  $\langle\langle M^n(A) \rangle\rangle_t = \bar{\nu}^n(A \times [0, t]) = \int_0^\cdot \int_E Q^n(s, x) \nu(ds, dx)$ , donde  $Q^n(s, x)$  es un proceso simétrico positivo, entonces,  $\langle\langle X^n \rangle\rangle = \int_0^\cdot \int_E f^2(s, x) \bar{\nu}^n(ds, dx)$  y además  $\langle\langle X \rangle\rangle = \int_0^\cdot \int_E f^2(s, x) \bar{\mu}(ds, dx)$ . Por lo tanto, por (i),  $\langle\langle X^n \rangle\rangle = \int_0^\cdot \int_E f^2(s, x) \bar{\nu}^n(ds, dx) \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^\cdot \int_E f^2(s, x) \bar{\mu}(ds, dx) = \langle\langle X \rangle\rangle$ , es decir,  $\langle\langle X^n \rangle\rangle \xrightarrow{\mathcal{P}} \langle\langle X \rangle\rangle$ .

Como por (2.1) de Xie se tiene que  
 $\forall g \in C_0^+(H), \int_0^{\cdot} \int_H g(x) \lambda^n(ds, dx) = \int_0^{\cdot} \int_{\mathcal{M}(E)} g(\int_E f(s, x)y(dx)) \beta^n(ds, dy)$   
 , donde  $\lambda^n$  es el dual predecible asociado a los saltos de  $X^n = \int_0^{\cdot} \int_E f(s, x)M^n(ds, dx)$   
 , entonces por (ii)  $\int_0^{\cdot} \int_H g(x) \lambda^n(ds, dx) \xrightarrow{P} 0 \quad \forall g \in C_0^+(H) \quad (2)$

Tomando  $g(x) = \|x\|$ , entonces por (1) y (2)  $\int_0^t \int_H \|x\|^2 I_{\{\|x\|>\varepsilon\}} \lambda^n(ds, dx) \xrightarrow[n]{P} 0 \quad \forall t \geq 0, \varepsilon > 0$ . Aplicando Teorema VIII-3.22 de Jacod y Shiryaev se tiene que  $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$  , es decir,  $\int_0^{\cdot} \int_E f(s, x)M^n(ds, dx) \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^{\cdot} \int_E f(s, x)B(ds, dx)$ .

Por otra parte, como  $B_t(A) = W((0, t] \times A)$  es continua, entonces  $\langle\langle B(A) \rangle\rangle_t = \bar{\mu}((0, t] \times A)$  es continua y por (i)  $\{\langle\langle M^n(A) \rangle\rangle\}_{n \geq 1}$  es  $C$ -tensa  $\forall A \in \mathcal{A}$  y por Corolario 2.3,  $\{M^n\}_{n \geq 1}$  es tensa (y por lo tanto se tiene relativa compacidad). Sea  $\{M^{n_k}; k \in \mathbb{N}\}$  subsucesión arbitraria de  $\{M^n\}$  convergente en ley y llamemos  $P$  a su límite. Por (i)  $\langle\langle M^{n_k}(A) \rangle\rangle_t \xrightarrow[k]{P} \langle\langle B(A) \rangle\rangle_t$  , por lo

tanto,  $\sup_{s \leq N} \|\langle\langle M^{n_k}(A) \rangle\rangle_s - \langle\langle B(A) \rangle\rangle_s\| \xrightarrow[k]{P} 0$  (aplicando Teorema VIII-2.18 de Jacod y Shiryaev)

Pero por la tensión de  $\{M^n\}_{n \geq 1}$  ,  $\forall N > 0, \varepsilon > 0, \eta > 0$ , existen  $n_0, m \in \mathbb{N}$  tal que  $n_k \geq n_0 \Rightarrow P^{n_k} \left( \sup_{s \leq N} \|M_s^{n_k}(A) - V_m \circ \Pi_m M_s^{n_k}(A)\| \geq \eta \right) \leq \varepsilon \quad \forall A \in \mathcal{A}$  ,

donde  $\Pi_m : H \rightarrow \mathbb{R}^m$  ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$   $\{e_i\}_{i \geq 1}$  base ortonormal de  $H$  y  $V_m : \mathbb{R}^m \rightarrow H$   
 $(x_1, \dots, x_m) \mapsto \sum_{k=1}^m x_k e_k$

Como los  $\Pi_m$  son funciones continuas  $\forall m \geq 1$  , entonces ,  $\Pi_m B = \Pi_m P \quad \forall m \geq 1$ . Por lo tanto, el único límite posible es  $B$  .  $\square$

Con una hipótesis adicional se tiene la equivalencia.

**Teorema 2.5.** Sea  $\{M^n\}_{n \geq 1}$  como en el Teorema anterior y supongamos que

$|M^n(\{s\} \times E)| \leq b, s \geq 0, n \geq 1, b$  constante. Entonces  $M^n \xrightarrow{L} B$  si

y solo si se cumplen las condiciones (i) y (ii) del Teorema anterior, donde  $M^n(\{s\} \times E) = M_s^n(E) - M_{s-}^n(E)$  (el salto de  $M^n$  al tiempo  $s$ ).

**Demostración.** (Sólo la condición necesaria).

Supongamos  $M^n \xrightarrow{L} B$  y sean  $X^n = \int_0^\cdot \int_E f(s, x) M^n(ds, dx)$  y  $X = \int_0^\cdot \int_E f(s, x) B(ds, dx) \quad \forall f \in C_b(\mathbb{R}_+ \times E)$ , entonces, los  $X^n$  son martingalas cuadrados integrables y  $X$  una martingala Gaussiana continua con valores en  $H$ . Como  $|M^n(\{s\} \times E)| \leq b, s \geq 0, n \geq 1, b$  constante y  $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ , entonces,  $\|\Delta X^n\| \leq a$  para  $n \geq 1, a$  constante y  $\sup_t \langle X^n \rangle_t < \infty \quad \forall t > 0$ , lo que implica que  $(X^n)^{\otimes 2} \xrightarrow{\mathcal{L}} X^{\otimes 2}$  y por lo tanto  $\langle\langle X^n \rangle\rangle \rightarrow \langle\langle X \rangle\rangle$  bajo la topología en  $D\left(H \hat{\otimes}_2 H\right)$  y por Lema VIII-3.20 de Jacod y Shiryaev  $g * \lambda_t^n \rightarrow 0 \quad \forall t > 0, g \in C_0^+(H)$  donde  $g * \lambda_t^n = \int_0^t \int_H g(x) \lambda^n(ds, dx)$  y por (2.1) de Xie entonces se tiene (ii) y con (ii),(1) e identificando  $\|x\| = g(x)$  se obtiene (i).  $\square$

**Teorema 2.6.** Sea  $B = \{B_t(A), t \geq 0, A \in \mathcal{A}\}$  un ruido blanco con valores en  $H$  y  $\{M^n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de medidas martingalas  $H$ -valoradas localmente de cuadrados integrables. Supongamos que  $\forall t \geq 0, \varepsilon > 0, f \in C_b(\mathbb{R}_+ \times E)$

$$\int_0^t \int_{\mathcal{M}(E)} \left\| \int_E f(s, x) y(dx) \right\|^2 I_{\{\|\int_E f(s, x) y(dx)\| > \varepsilon\}} \beta^n(ds, dy) \xrightarrow[n]{\mathcal{P}} 0 \quad (1)$$

Sea además  $\{V^n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de procesos con trayectorias  $D(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{A}, H)$ .

Si las siguientes condiciones se cumplen:

$$(i) \quad \forall A \in \mathcal{A} \text{ y } \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \langle\langle M^n(A) \rangle\rangle_t \xrightarrow[n]{\mathcal{P}} \langle\langle B(A) \rangle\rangle_t = \bar{\mu}([0, t] \times A)$$

$$(\text{respectivamente, } \llbracket M^n(A) \rrbracket_t \xrightarrow[n]{\mathcal{P}} \langle\langle B(A) \rangle\rangle_t)$$

$$(ii) \quad \forall f \in C_b(\mathbb{R}_+ \times E), g \in C_0^+(H), t \geq 0, \int_0^t \int_{\mathcal{M}(E)} g\left(\int_E f(s, x) y(dx)\right) \beta^n(ds, dy) \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$$

$$(iii) \quad \forall A \in \mathcal{A} \text{ y } \forall N \in \mathbb{N}, \sup_{t \leq N} \|V_t^n(A)\| \xrightarrow[n]{\mathcal{P}} 0,$$

entonces  $M^n + V^n \xrightarrow{L} B$ .

**Demostración.** Por Teorema 2.4  $M^n \xrightarrow{L} B$

Sea  $S^n := M^n + V^n$ . Por (iii),  $\{V^n\}$  es C-tensa y como  $B$  es continua entonces por (i)  $\{M^n\}$  es C-tensa y por lo tanto  $\{S^n\}$  es C-tensa.

Sea  $\{S^{n_k}; k \in \mathbb{N}\}$  una subsucesión arbitraria de  $\{S^n\}$  convergente en

ley y sea  $P$  su límite. Como  $\Pi_m : H \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $x = (x_1, \dots, x_m)$

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ ,  $\{e_i\}_{i \geq 1}$  base ortonormal de  $H$ , es una función continua, en-

tonces,  $\Pi_m S^{n_k} \xrightarrow[k]{\mathcal{L}} \Pi_m P$ , pero por  $\otimes$  y (iii)  $\Pi_m S^{n_k} \xrightarrow[k]{\mathcal{L}} \Pi_m B$ .

De aquí,  $\Pi_m P = \Pi_m B \forall m \geq 1$ .  $\square$

## Referencias

- [1] Billingsley, P. (1968) *Convergence of Probability Measures*. John Wiley & Sons, New York.
- [2] Jacod, J.; Shiryaev, N. A. (1987) *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Springer, Berlin.
- [3] El Karoui, N.; Méléard, S. (1990) “Martingale measures and stochastic calculus”, *Probab.Theor. Related Fields* **84**: 83–101.
- [4] Fierro, R. (1986) *Convergencia en ley de martingalas, con valores en el dual de un espacio nuclear de Fréchet*. Tesis de Doctorado.
- [5] Métivier, M.; Nakao, S. (1987) “Equivalent conditions for the tightness of a sequence of continous Hilbert valued martingales”, *Nagoya Math. J.* **106**: 113–119.
- [6] Walsh, J.B. (1986) *An Introduction to Stochastic Partial Differential Equations*. Lecture Notes in Math. No.1180. Springer, Berlin: 266–489.
- [7] Xie, Y. (1995) “Limit theorems of Hilbert valued semimartingales and Hilbert valued martingale measures”, *Stochastic Process. Appl.* **59**: 277–293.

MODELO ADITIVO VS MODELO  
MULTIPLICATIVO EN EL ANÁLISIS DE MATRICES  
MULTITRAZOS MULTIMTODOS

JACQUES JUHEL \*– THIERRY MARIVAIN \*

---

**Resumen**

La evaluación de la validez conceptual –convergente, divergente– de las construcciones psicológicas que utiliza, es para el psicólogo una necesidad imperiosa. Cuando varios de estos trazos o procesos, comportamientos, etc. son medidos por medio de varios métodos, se puede usar Multitrazos Multimétodos (MTMM; Campbell & Fiske, 1959) cuyo objetivo es evaluar independientemente de los efectos ligados a los métodos

- a) la varianza que tienen en común los indicadores respectivos de cada trazo;
- b) las correlaciones entre los diferentes trazos considerados.

Diversos modelos en variables latentes, aditivos o multiplicativos, han sido desarrollados para llevar a cabo esta evaluación. En efecto, sean una matriz MTMM de  $J$  trazos medidos por  $K$  métodos, siendo  $X_{jkn}$  el puntaje del sujeto  $n$  en el trazo  $j$  medido por el método  $k$ . El modelo puede ser *aditivo*, es decir especificar generalmente que

$$X_{jkn} = \alpha_{jk}T_{jn} + \beta_{jk}M_{kn} + \varepsilon_{jkn}$$

---

\*Groupe de Recherche en Psychologie Différentielle, Université de Rennes 2, 6 avenue Gaston Berger, 35043 Rennes cedex, Francia

con

- $\alpha_{jk}$ , saturación de la variable  $X_{jk}$  sobre el trazo  $j$ ,
- $T_{jn}$ , puntaje terico del individuo  $n$  en el trazo  $j$ ,
- $\beta_{jk}$ , saturación de la variable  $X_{jk}$  sobre el mtodo  $k$ ,
- $M_{kn}$ , puntaje terico del individuo  $n$  con el mtodo  $k$ ,
- $\varepsilon_{jkn}$ , unicidad del individuo  $n$  sobre la variable  $X_{jk}$ .

Si se hace adems la hiptesis de que los  $j$  trazos no estn correlacionados con los  $k$  mtodos, que las unicidades no estn ni correlacionadas entre ellas ni correlacionadas con los trazos ni los mtodos, entonces la matriz de varianza-covarianza  $\Sigma$  de las variables observadas puede escribirse:

$$\Sigma = A\Phi_T A' + B\Phi_M B' + \Theta$$

con

- $A$ , matriz de los  $\alpha_{jk}$ ,
- $B$ , matriz de los  $\beta_{jk}$ ,
- $\Phi_T$ , matriz de covarianzas de los trazos,
- $\Phi_M$ , matriz de covarianzas de los mtodos,
- $\Theta$ , matriz de covarianzas diagonal de las unicidades.

El modelo tambien puede ser *multiplicativo* y especificar entonces que:

$$X_{jkn} = \delta_{jk} T_{jn} M_{kn} + \varepsilon_{jkn}$$

con  $\delta_{jk}$  constante de normacin. Con las mismas hiptesis complementarias que antes, se puede escribir:

$$\Sigma = D(P_M \otimes P_T)D + \Theta.$$

Los resultados de la evaluacin dependen as del tipo de modelo subyacente del que se hace la hiptesis, puesto que an si el ajuste del modelo es una primera condicin para la estimacin de los parmetros, los criterios de convergencia y de divergencia se aprecian de manera diferente segn que el modelo sea aditivo o multiplicativo. Luego, el objetivo de este trabajo es de ilustrar este punto importante presentando los resultados de una sucesin de anlisis estructurales efectuados sobre una matriz MTMM de datos recogidos sobre una muestra de 263 estudiantes de liceos franceses, que respondieron a varios cuestionarios de intereses profesionales (6 trazos, 4 mtodos). Las caractersticas y ventajas de los modelos aditivos y multiplicativos son discutidos.



## RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE PROBLEMAS DE CONTORNO NO LINEALES Y SUS APLICACIONES

SONIA E. PALOMINO \* - RAFAEL M.-CASALI †

### 1 El Problema

En este trabajo discutimos la resolución numérica de problemas con valores de contorno no lineales de carácter unidimensional de tipo:

$$\begin{cases} y''(x) + P(x)y'(x) + F(x, y(x)) = 0, & a \leq x \leq b \\ y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{cases} \quad (1)$$

donde:

1.  $P(x)$  es una función continua en el intervalo  $[a, b]$ , y
2.  $F(x, y)$  es una función con derivadas parciales continuas en relación a  $y$  que satisface:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \leq 0, \quad -\infty < y < \infty, \quad a \leq x \leq b$$

Estas dos condiciones son suficientes para garantizar la existencia y unicidad de la solución analítica de (1).

### 2 Tratamiento numérico del problema

En el tratamiento numérico del problema, usamos diferencias centrales en las derivadas de primero y segundo orden, donde el error en la aproximación es de orden de  $O(h^2)$

\*Universidad Federal de Santa Catarina, Departamento de Matemática, Campus Universitario, Trindade, CEP 88040-900, Florianópolis, Santa Catarina, Brasil; e-mail: palomino@mtm.ufsc.br

†Misma dirección; e-mail: rafael@pet.mtm.ufsc.br



### 3 Resultados numéricos

En esta sección exhibimos tests en los cuales mostramos que nuestra rutina se muestra bastante eficiente. En el proceso de aproximación es necesario resolver sistemas lineales tridiagonales a cada iteración implementando una rutina en MATLAB para resolver estos sistemas. Esta rutina está basada en la descomposición  $LU$  y en la eliminación gaussiana para la resolución del sistema. Implementamos, también en MATLAB, una rutina para resolver un problema del tipo (2). Esta rutina utiliza el paquete SYMBOLIC, para determinar la derivada parcial de  $F(x, y)$  en relación a  $y$ , y el método de Newton.

#### 3.1 Primera experiencia numérica

Usamos una tolerancia de  $10^{-1}$  para resolver el problema a continuación, donde la solución exacta es  $Y(x) = x^2$ .

En este caso tenemos que  $P(x) = 0$  y  $F(x, y) = -e^{x^2} - e^{y(x)} - 2$ , así el problema queda formulado como sigue:

$$\begin{cases} y''(x) + e^{x^2} - e^{y(x)} - 2 = 0, 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Con los siguientes resultados:

n <sup>o</sup> de puntos del intervalo	slinear.m		slinear.m	
	Tiempo de ejecución (en seg.)	Error Global (*10 <sup>-4</sup> )	Tiempo de ejecución (en seg.)	Error Global (*10 <sup>-4</sup> )
50	0,27	1,1811	0,28	1,2248
100	0,50	1,1816	0,55	1,2260
200	1,04	1,1818	1,04	1,2263
400	2,42	1,1818	2,14	1,2263
500	4,01	1,1818	2,74	1,2263
700	50,75	1,1818	3,90	1,2263
1000	93,25	1,1818	6,75	1,2263

donde Error Global =  $\max\{|Y(x_i) - y(x_i)|, i = 0, \dots, n + 1\}$ .

En los tests dados solo cuatro iteraciones del método de Newton fueron necesarios para conseguir la tolerancia. Para tolerancias mayores el número de iteraciones aumentó linealmente. Observemos que, con una tolerancia pobre obtuvimos errores pequeños, y de un programa para otro obtuvimos una reducción en el tiempo de ejecución bastante significativa.

### 3.2 Segunda experiencia numérica

En esta experiencia, usamos una tolerancia de  $10^{-1}$  para resolver el problema, donde la solución exacta es  $Y(x) = x(e^x - e)$ .

Observemos que  $P(x) = -1$  y  $F(x, y) = y(x) - e^x(1 - x) - e(1 + x)$ , y también, que  $F(x, y)$  es lineal en relación con  $y$ . Esto quiere decir que nuestro programa también puede soportar problemas lineales. Entonces el problema formulado es:

$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) + y(x) - e^x(1 - x) - e(1 + x) = 0, 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Con los siguientes resultados:

n° de puntos del intervalo	slinear.m		slinear.m	
	Tiempo de ejecución (en seg.)	Error Global	Tiempo de ejecución (en seg.)	Error Global
50	0,44	$1,6066 \cdot 10^{-5}$	0,55	$1,6066 \cdot 10^{-5}$
100	0,71	$4,0164 \cdot 10^{-6}$	0,71	$4,0164 \cdot 10^{-6}$
200	1,43	$1,0041 \cdot 10^{-6}$	1,32	$1,0041 \cdot 10^{-6}$
400	6,26	$1,6066 \cdot 10^{-7}$	3,13	$1,6066 \cdot 10^{-7}$
700	59,26	$8,1968 \cdot 10^{-8}$	5,55	$8,1968 \cdot 10^{-8}$

En estos tests, 3 iteraciones fueron necesarias para llegar a la tolerancia. Este número de iteraciones fue el mismo para una tolerancia de  $10^{-13}$ . En este caso también observamos la mejoría en el tiempo de ejecución y los bajos errores para una tolerancia pobre.

### 3.3 Aplicaciones

En esta sección mostraremos cómo es que Problemas con Valores de Contorno de carácter unidimensional en la formulación 1 son aplicables a problemas originados en física o ingeniería. Exhibiremos solamente una aplicación en física. Se trata del problema del semiconductor ([4]). El problema físico queda modelado por la ecuación:

$$\begin{cases} y''(x) + e^{-y(x)} - e^{y(x)} + \tanh(20(\frac{x}{10} - \frac{1}{2})) = 0, 0 \leq x \leq 10 \\ y(0) = \operatorname{arcsenh}(\frac{\tanh(-10)}{2}) + \mu_0 \\ y(10) = \operatorname{arcsenh}(\frac{\tanh(10)}{2}) \end{cases}$$

donde  $\mu_0$  es un parámetro dado por las condiciones físicas del problema. En esta experiencia también usamos una tolerancia de  $10^{-1}$ . Note que

$$\begin{aligned} P(x) &= 0 \\ F(x, y) &= e^{-y(x)} - e^{y(x)} + \tanh(20(\frac{x}{10} - \frac{1}{2})). \end{aligned}$$

En un primer caso consideramos  $\mu_0 = 0$  (fig. 1). En este caso, no conocemos la solución exacta, mas podemos comparar los resultados con aquellos obtenidos por [4]. El resultado final es el de línea continua, la línea trazada es el vector inicial usado por esa referencia. La figura 2 muestra nuestro resultado obtenido usando el vector nulo como vector inicial.

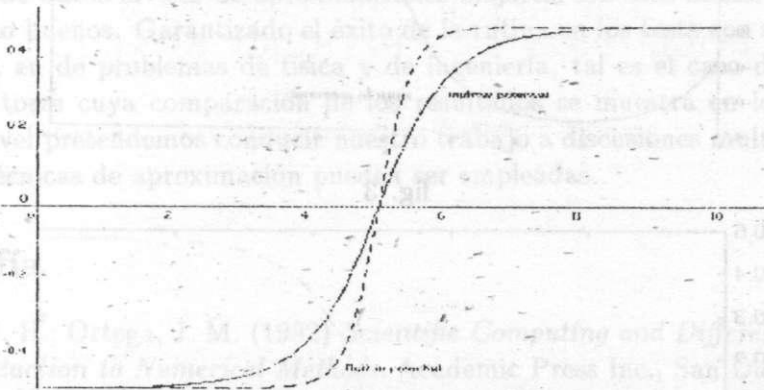


fig. 1

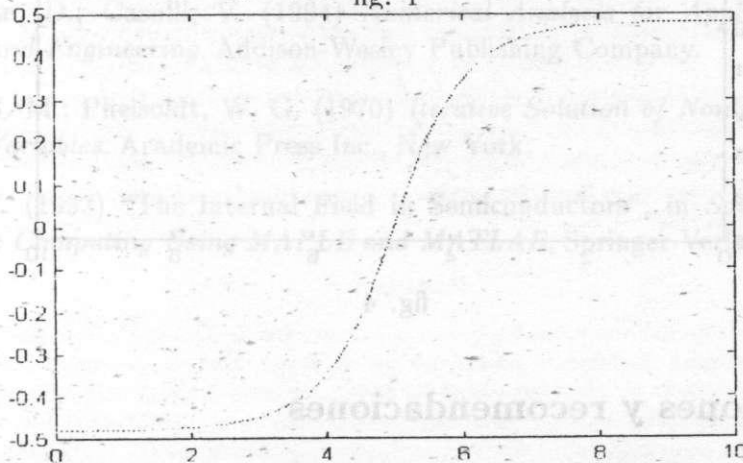


fig. 2

En un segundo caso, consideramos  $\mu_0 = 0,3$ , cambiamos con esto la condición inicial. En la figura 3 se observa el resultado final que es el de línea continua, con línea trazada s el vector inicial usado en la referencia. La figura 4 muestra el resultado que obtuvimos, considerando el vector nulo como vector inicial.

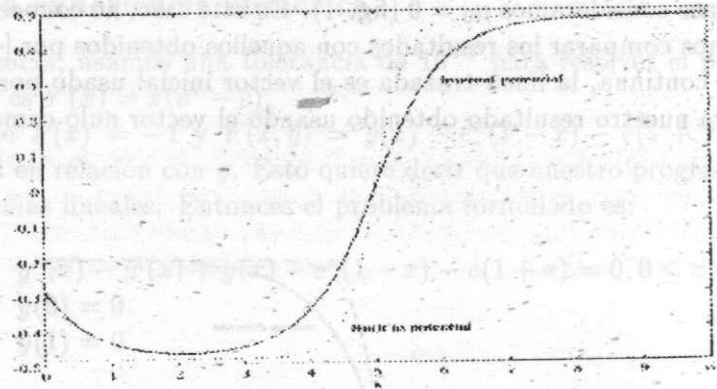


fig. 3

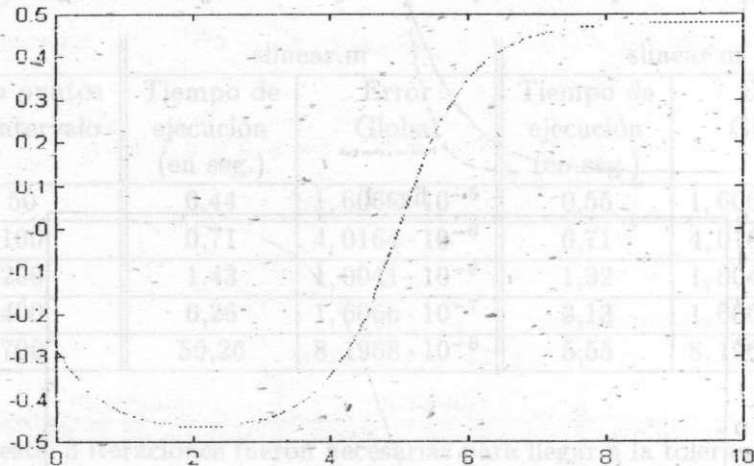


fig. 4

#### 4 Conclusiones y recomendaciones

Garantizamos que nuestra solución numérica es convergente y demostramos este hecho en muchos problemas de test cuya solución analítica es conocida. De este conjunto apenas fueron exhibidos dos casos en las secciones anteriores.

Por ejemplo, en uno de nuestros tests, notamos que un aumento del refinamiento de la malla de 0,02 a 0,01 no nos da un mejor resultado. Así, a partir de una determinada partición no vale la pena aumentarla, pues los errores continuarán siendo del mismo orden. Otros tests de esta índole generan resultados semejantes y un estudio teórico deberá ser hecho para justificarlo.

Un inconveniente que encontramos fue la capacidad computacional toda vez que se hace el refinamiento de la malla, pues cuando ésta es de orden de  $10^{-3}$  el sistema parece sobrecargado. Frente a este problema encontramos como alternativa el almacenamiento de las matrices tridiagonales como vectores, teniendo en vista reducir el espacio de memoria

ocupado.

Observamos también que considerando apenas  $F(x, y(x)) = Q(x)y(x) - R(x)$  podemos utilizar nuestra rutina para resolver problemas de valor de contorno lineales.

Es importante observar que solamente para exhibir la convergencia fué mostrado en los tests una aproximación muy pobre y aun en estas circunstancias el número de pasos en las iteraciones de Newton es pequeño y que en cualquier otro problema podemos colocar en la entrada de datos niveles de aproximaciones mejores. De esta manera los resultados seguirán siendo buenos. Garantizado el éxito de la rutina en los tests con solución exacta, aplicamos ella en de problemas de física y de ingeniería, tal es el caso del problema de los semiconductores cuya comparación de los resultados se muestra en los gráficos. En un segundo nivel pretendemos conducir nuestro trabajo a discusiones multidimensionales, donde otras técnicas de aproximación pueden ser empleadas.

## Bibliografía

- [1] Golub, G. H.; Ortega, J. M. (1992) *Scientific Computing and Differential Equations. An Introduction to Numerical Methods*. Academic Press Inc., San Diego.
- [2] Greenspan, D.; Casulli, V. (1994) *Numerical Analysis for Applied Mathematics, Science and Engineering*. Addison-Wesley Publishing Company.
- [3] Ortega, J. M.; Pheisoldt, W. G. (1970) *Iterative Solution of Nonlinear Equation in Several Variables*. Academic Press Inc., New York.
- [4] Klvña, F. (1993) "The Internal Field in Semiconductors", in *Solving Problems in Scientific Computing Using MAPLE and MATLAB*, Springer-Verlag, Berlin: 59-67.

APPLICATION OF COMPUTER SIMULATION IN  
THE STUDY OF LOCAL EFFECTS OF  
ATMOSPHERIC POLLUTION IN SOUTHERN  
BRAZIL

SONIA ELENA PALOMINO CASTRO \*

---

**Abstract**

Air pollution is a phenomenon that frequently occurs in many urban and industrial regions of the world, including parts of Southern Brazil, with undesirable consequences including changes in wildlife patterns, and various illnesses in human populations. In a previous work in the X-th SIMMAC we introduced a model, numerical approximation, and the respective simulation of concentrations of air pollutants that were simulated by effects of diffusion and advection, including transportation by predominant wind currents on the time evolution of concentrations of air pollutants. In the present report we apply numerical analysis to this model to initiate a study of local effects of atmospheric pollution.

**Resumen**

La contaminación del aire es un fenómeno que ocurre frecuentemente en muchas regiones urbanas e industriales, incluyendo partes

---

\*Universidad Federal de Santa Catarina, Departamento de Matemática, Campus Universitario, Trindade, CEP 88040-900, Florianópolis, Santa Catarina, Brasil; e-mail: palomino@mtm.ufsc.br



del Sur de Brasil, con consecuencias indeseables que incluyen cambios en el comportamiento de la vida silvestre y varias enfermedades en las poblaciones humanas. En un trabajo anterior, presentado en el X SIMMAC, introdujimos un modelo, la aproximación numérica y la respectiva simulación de las concentraciones de contaminantes aéreos, que fueron simulados por medio de efectos de difusión y advección, incluyendo transporte por corrientes de viento predominantes en el tiempo de evolución de las concentraciones de contaminantes aéreos. En el presente informe aplicamos al análisis numérico a este modelo para iniciar el estudio de los efectos locales de la contaminación atmosférica.

## UN MODELO DE SIMULACIÓN DE LOS RESULTADOS DE UN TORNEO DE FÚTBOL

EDUARDO PIZA VOLIO \*

---

### Resumen

En este artículo se propone y discute un modelo matemático de simulación de los posibles resultados de un torneo de fútbol, en el cual un número limitado de equipos busca la clasificación a una etapa subsiguiente de competición.

Este modelo fue ampliamente utilizado durante el desarrollo del Torneo de la CONCACAF, eliminatorio para el Mundial de Fútbol de Francia 1998, en el cual participó Costa Rica sin éxito. Las estimaciones de las probabilidades de clasificar de cada equipo participante, calculadas a través del modelo, fueron ampliamente difundidas por la prensa deportiva de nuestro país y otros países del área de la CONCACAF.

También se utilizó este modelo en el Torneo de Clasificación de Sudamérica para el Mundial de Francia 1998.

## 1 Introducción

El empleo de modelos matemáticos aplicados a las disciplinas deportivas está bastante generalizado en todo el mundo. El deporte se ha especializado

---

\*CIMPA, Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, 2060 San José, Costa Rica; e-mail: epiza@cariari.ucr.ac.cr

y tecnificado a tal nivel que necesita, cada vez en mayor grado, de la ayuda de la matemática aplicada para explicar, comparar, predecir y clasificar a los participantes en una competencia deportiva. Por ejemplo, en el caso concreto del fútbol, la Federación Internacional de Fútbol Asociado (FIFA) está utilizando un modelo matemático para establecer y mantener actualizado un “ranking” o escala numérica, indicador de la fuerza futbolística de cada país perteneciente a la FIFA [2], modelo matemático que guarda mucha similitud con el “sistema ELO”, empleado en el ajedrez con el mismo propósito desde hace unos veinte años [3].

Utilizando técnicas de simulación matemática y gracias a los recursos que nos brindan las rápidas micro-computadoras de hoy día, es posible estimar las *probabilidades de clasificar* que tiene cada equipo participante en un torneo de fútbol del tipo “todos contra todos”, o de otro tipo de competencia análoga. De este asunto nos ocupamos en este artículo.

Existió una gran motivación para el desarrollo del modelo que aquí se describe. En efecto, el fútbol es el deporte más popular en Costa Rica, un deporte de masas al cual son aficionados los costarricenses de cualquier edad, sexo y condición social. Es bien sabido que en ciertos períodos la pasión por el fútbol es la fuerza social más importante en el país, al ritmo de la cual de desarrolla la vida de los costarricenses, por encima de otros importantes asuntos tales como la política, la situación general del país, etc. Lo mismo ocurre en muchos otros de los países de Latinoamérica.

En el caso concreto que nos ocupa, Costa Rica disputaba una plaza para jugar el Mundial de Fútbol de Francia 1998, en el Torneo de la CONCACAF, junto con México, Estados Unidos, Jamaica, El Salvador y Canadá. De estos 6 equipos, solamente había disponibles 3 plazas para el Mundial de Francia 1998. Durante varios meses, de acuerdo con los resultados que se venían obteniendo durante el desarrollo del torneo, Costa Rica tenía muy buenas opciones de ganar una de estas 3 plazas. Surgió de pronto un interés en poder cuantificar las probabilidades que tenía nuestra selección de clasificar, o en general, las probabilidades de cada uno de los equipos participantes. Además existía una polémica en el ambiente deportivo, relativa a cuál era el número de puntos que debíamos acumular para garantizar nuestra clasificación, así como otras cuestiones por el estilo.

El modelo de simulación desarrollado responde a estas preguntas adecuadamente. Se llevó a la práctica el modelo, programándolo en el lenguaje PASCAL en micro-computadoras del tipo *Pentium*, obteniéndose un programa muy versátil y general, a tal grado que el mismo puede servir, luego de un mínimo de modificaciones fáciles de implementar, para otros tipos de com-

petencias deportivas que sigan la misma dinámica.

## 2 El modelo de simulación

Un modelo de simulación para estimar las *probabilidades de clasificación* de cada equipo participante en un torneo de fútbol (como por ejemplo el Torneo de la CONCACAF, o el de Sudamérica), consiste básicamente en *simular al azar* millones de veces los resultados de los partidos que aún no se han jugado, contabilizando de esta manera la proporción de veces en que cada uno de los equipos logra clasificar: ésta es la *probabilidad de clasificación* de cada equipo. También de esta manera se puede contabilizar la proporción de veces en que un equipo en particular logra la clasificación con un número específico de puntos, con el fin de estimar la probabilidad de clasificar que tiene el equipo en cuestión bajo el posible escenario que el equipo logre obtener no menos que ese número específico de puntos.

Lo fundamental de un modelo de simulación de esta naturaleza es sin duda alguna las hipótesis que se utilizan para gobernar la *simulación al azar* de los partidos que faltan por jugar. Las hipótesis deben ser escogidas cuidadosamente de manera que se modele apropiadamente el mundo en estudio, en este caso concreto, una competencia de fútbol. La experiencia del autor demuestra que cada hipótesis que se utilice establece a priori un criterio de selección. Se trata pues de escoger las hipótesis adecuadas que produzcan criterios de selección objetivos y coherentes.

Deben evitarse las hipótesis irrelevantes y subjetivas, basadas en juicios de valor o en mitos que no tienen un buen valor predictivo ni corresponden a la actualidad del torneo. Por ejemplo, si erróneamente supusiéramos que tanto México como Estados Unidos y Costa Rica son los equipos superiores del área de la CONCACAF, basados por ejemplo en alguna experiencia histórica, entonces obtendríamos obviamente de las simulaciones que precisamente estos equipos serán los que obtendrán una plaza para el Mundial de Francia. ¡En tal caso por supuesto no habría nada que calcular!

En los modelos de simulación es muy importante la escogencia de un buen generador de números aleatorios, ya que es la base de la simulación al azar. En este aspecto hay que tener especial cuidado, pues los generadores “pseudo-aleatorios” (de tipo congruencial) que ofrecen los lenguajes de programación son inadecuados, debido a que tienen sesgos importantes para un trabajo de simulación. En la programación en PASCAL se escogió el generador de números aleatorios de tipo semi-aditivo (de período infinito)

desarrollado por Knuth [1], el cual ha demostrado ser adecuado en los estudios de simulación al azar.

## 2.1 Los datos del modelo

Sean  $n$  el número de equipos que juegan el torneo y  $k$  el número de plazas disponibles para la clasificación. Por ejemplo, para el Torneo de la CONCACAF,  $n = 6$  y  $k = 3$ . El programa de simulación requiere a continuación de la siguiente información:

- El nombre de los  $n$  equipos participantes, junto con la información referente a si el equipo ya se encuentra clasificado, o si ya se encuentra eliminado, o si clasificaría si ganara el siguiente partido, o si quedaría eliminado si pierde el siguiente partido.
- La lista de partidos ya jugados con sus resultados y la información referente a cuál era el equipo local.
- La lista de partidos aún no jugados, en el orden cronológico en que se desarrollarán, con la información referente a cuál será el equipo local.

Además de lo anterior, el programa de simulación requiere de cierta información adicional, cual es: la cantidad de puntos obtenidos con una victoria (3 en el caso de la CONCACAF), la cantidad de puntos obtenidos con un empate (1 en el caso de la CONCACAF), y si existe o no desempate con penales (no, en el caso de la CONCACAF) cuando se produce un empate. Esta información adicional está prevista para poder utilizar el modelo en otras competiciones futbolísticas.

## 2.2 Las hipótesis empleadas

La simulación se lleva a cabo bajo una serie de supuestos o hipótesis de trabajo de carácter general, los cuales se exponen a continuación:

1. En ausencia total de información (por ejemplo al inicio del torneo), las probabilidades de ganar, empatar o perder de cada equipo es de  $\frac{1}{3}$  cada una.
2. Los resultados previos al torneo (lo que llamamos *el pasado histórico*) no tienen ninguna influencia en el cálculo de las probabilidades de victoria, empate o pérdida de cada partido del torneo. En efecto,

el pasado histórico constituye tal solo un mito para el torneo que se está simulando, pues éste se juega con otros equipos, con distintos jugadores, en distintas condiciones y con distintas motivaciones, en otras épocas no comparables. Por ejemplo, el pasado histórico nos dice que Jamaica es el equipo más débil de la CONCACAF, pero esta creencia no tiene ningún fundamento objetivo en la actualidad y por lo tanto no debe ser tomada en cuenta en el modelo, pues no es pertinente para la simulación.

3. En consecuencia con lo anterior, tampoco se toman en cuenta en el desarrollo del modelo los juicios de valor apriorísticos relativos a la fuerza futbolística de los equipos. Juicios a priori tales como “México es el equipo más fuerte de la CONCACAF” son inaceptables para el modelo (aunque pueda sonar razonable), pues se fundamenta en el pasado histórico.
4. En el modelo se toman en cuenta los resultados de los partidos previamente jugados en el mismo torneo, como uno de los mecanismo para establecer las diferencias en cuanto a la fuerza de los equipos.
5. En el modelo se toman en cuenta la posible ventaja que representa para un equipo el jugar en casa como local, contra la posible desventaja de jugar de visitante. En ningún caso el ser equipo local representa una desventaja.
6. De gran importancia en el modelo de simulación son los resultados precisos de los partidos ya jugados, ya que permiten el cálculo de la diferencia de goles a favor menos goles en contra de cada equipo al final del torneo. Este es el principal criterio para decidir los posibles empates en los lugares de clasificación.
7. El modelo toma en consideración el orden preciso en que se jugarán los partidos del torneo, esto es, el calendario de juegos. Esto es muy importante, pues nos lleva a un sistema dinámico para el cálculo de las probabilidades de ganar, empatar o perder que cada equipo posee en cada enfrentamiento: influyen los resultados previos del mismo torneo en el orden real en que se obtuvieron.
8. El modelo no toma en consideración algunos imponderables que pueden surgir durante el desarrollo del torneo, tales como por ejemplo los sesgos producidos por los malos arbitrajes, los cambios de entrenadores,

las posibles lesiones de los jugadores importantes, etc. Estos imponderables son imposibles de modelar en forma objetiva, pues por lo general solamente nos enteramos de las particularidades de lo que está ocurriendo con nuestro equipo, desconociendo a menudo cuáles son los imponderables de nuestros adversarios.

### 2.3 Las probabilidades de victoria, empate y pérdida en cada encuentro

En la simulación del partido entre el equipo  $A$  (equipo local) contra el equipo  $B$  (equipo visitante) en la fecha (o tiempo)  $t$ , se procede a calcular las probabilidades  $p_A(t)$ ,  $p_E(t)$  y  $p_B(t)$  de que gane  $A$ , se produzca un empate, o gane  $B$  respectivamente, donde  $p_A(t) + p_E(t) + p_B(t) = 1$ . De lo anterior, basta con calcular  $p_A(t)$  y  $p_E(t)$ , pues  $p_B(t)$  se calcula por diferencia. Estas probabilidades son dependientes del tiempo  $t$ , o fecha en la cual se juega el partido. La variable tiempo está directamente asociada al orden en que se jueguen los partidos, esto es, al calendario del torneo.

El cálculo de la probabilidad  $p_E(t)$  de que se produzca un empate entre el equipo  $A$  contra el equipo  $B$  se calcula como sigue:

$$p_E(t) = \min \left\{ \frac{2}{5}, \max \left\{ \frac{1}{5}, \frac{N_{\text{emp}}(t)}{N_{\text{tot}}(t)} \right\} \right\},$$

donde:

- $N_{\text{emp}}(t)$  es el número de partidos del torneo que han terminado empatados, antes de la fecha  $t$ .
- $N_{\text{tot}}(t)$  es el número de partidos del torneo ya jugados, antes de la fecha  $t$ .

De esta manera, la probabilidad  $p_E(t)$  de que se produzca un empate entre  $A$  y  $B$  refleja adecuadamente la tendencia de resultados empatados que ha arrojado el torneo hasta el momento, con un tope superior del 40% y uno inferior del 20%. Los valores específicos de estos topes máximo y mínimo fueron escogidos siguiendo el criterio de expertos, consultando a varios especialistas en fútbol. Tienen importancia al principio del torneo, cuando no poseemos aún una estimación adecuada de la proporción de juegos del torneo que quedan empatados, aunque sus valores específicos dejan de tener importancia conforme el torneo avanza. Se hizo un análisis de sensibilidad en la escogencia de estos topes máximo y mínimo de la probabilidad

$p_E(t)$ , demostrándose en la práctica que la variación de estos topes no ejerce ninguna influencia en los resultados obtenidos.

Más elaborada es la estimación de la probabilidad  $p_A(t)$  de que resulte vencedor el equipo  $A$ . En síntesis,  $p_A(t)$  está influenciada por dos factores principales, a saber: (i) el hecho de que  $A$  es el equipo casa, lo cual supone una ventaja para  $A$  casi siempre (nunca una desventaja); (ii) el rendimiento hasta ahora obtenido por el equipo  $A$  en el torneo, comparado con el rendimiento obtenido por el equipo  $B$ . Además de estos dos factores principales, interviene un tercer factor secundario, el cual incorpora alguna otra información relevante para la estimación del resultado, como por ejemplo, si alguno de los equipos  $A$  o  $B$  ya se encuentra clasificado, o eliminado, o bien si alguno de ellos clasifica con una victoria, o es eliminado con una derrota. La fórmula definitiva para la probabilidad  $p_A(t)$  es como sigue:

$$p_A(t) = \xi(t) \cdot (1 - p_E(t)) \cdot \frac{p_\alpha(t) + p_\beta(t)}{2},$$

donde:

- El factor  $(1 - p_E(t))$  denota la probabilidad restante, a distribuir entre  $p_A(t)$  y  $p_B(t)$ , luego de haber calculado  $p_E(t)$ .
- $p_\alpha(t)$  representa la probabilidad de que  $A$  resulte vencedor, dado a que es el equipo casa. Se calcula como el máximo entre  $\frac{1}{2}$  y la proporción de veces que los equipos casa han resultado vencedores durante el torneo, esto es:

$$p_\alpha(t) = \max \left\{ \frac{1}{2}, \frac{N_{\text{casa}}(t)}{N_{\text{tot}}(t)} \right\},$$

donde  $N_{\text{casa}}(t)$  es la cantidad de veces en que los equipos casa han resultado vencedores y  $N_{\text{tot}}(t)$  es la cantidad de encuentros ya jugados. Obsérvese que esta probabilidad nunca es inferior al 50%, en concordancia con la hipótesis de que ser equipo casa nunca representa una desventaja.

- $p_\beta(t)$  representa la probabilidad de que  $A$  resulte vencedor en su enfrentamiento contra  $B$ , tomando en cuenta únicamente los rendimientos hasta el momento de ambos equipos. Se calcula como sigue:

$$p_\beta(t) = \frac{\text{Rend}_A(t)}{\text{Rend}_A(t) + \text{Rend}_B(t)}.$$



Aquí  $\text{Rend}_A(t)$  y  $\text{Rend}_B(t)$  denotan los rendimientos de los equipos  $A$  y  $B$  previo a la fecha  $t$  respectivamente. Se calculan tomando en consideración los puntos obtenidos por los equipos  $A$  y  $B$  y la cantidad de juegos jugados por cada uno de ellos, así como el valor en puntos de una victoria.

- $\xi(t)$  es un *factor de oportunidad* que eventualmente modifica la probabilidad de ganar del equipo  $A$ , cuando se sabe que algunos de los equipos  $A$  o  $B$  ya se encuentra clasificado, o se encuentra eliminado, o clasificaría con una victoria, o se eliminaría con una derrota. El valor de  $\xi(t)$  es un número real cercano a 1. Valores de  $\xi(t)$  superiores a 1 hacen que la probabilidad de una victoria de  $A$  aumente, debido a estos factores conocidos, mientras que valores de  $\xi(t)$  inferiores a 1 disminuyen la probabilidad  $p_A(t)$ .

Hasta el momento, el modelo de simulación ha sido siempre utilizado con el valor constante de  $\xi(t) = 1$ , pues el autor no ha encontrado una manera adecuada de incorporar esta información. Una posible mejora del modelo de simulación consistiría quizás en una selección adecuada de este *factor de oportunidad*, el cual a su vez depende del conocimiento actual de la clasificación o eliminación de uno de los equipos en disputa. Para poner un ejemplo, es evidente que México no jugará con el mismo ímpetu en su propia cancha, si ya hay certeza que se encuentra clasificado, mientras que Canadá no ofrecerá mucha batalla aunque juegue en su propia cancha, si ya se sabe que se encuentra completamente eliminada.

Obsérvese que los factores medidos mediante las probabilidades  $p_\alpha(t)$  y  $p_\beta(t)$  se promedian. En efecto, no hay evidencia de que alguno de esos factores predomine sobre el otro.

Una vez calculadas las probabilidades  $p_A(t)$ ,  $p_E(t)$  y  $p_B(t)$ , se procede como sigue para decidir el resultado del partido entre  $A$  y  $B$ : se genera un número al azar con distribución uniforme en  $(0, 1)$ . Si el número generado se encuentra en el intervalo  $(0, p_A(t))$ , entonces se declara vencedor al equipo  $A$ . Si el número generado se encuentra en el intervalo  $[p_A(t), p_A(t) + p_E(t)]$ , entonces se declara empatado el partido. Finalmente, si el número generado se encuentra en el intervalo  $(p_A(t) + p_E(t), 1)$ , entonces se declara vencedor al equipo visitante  $B$ .

## 2.4 La simulación del resultado numérico de cada encuentro

Una vez determinado cuál equipo es el vencedor, si lo hay, de acuerdo a la regla al azar anteriormente descrita, interesa en el modelo el resultado numérico del partido, para efectos de poder contabilizar al final los goles a favor y los goles en contra de cada equipo.

Para ello, considérese la variable aleatoria  $X$  correspondiente a la diferencia de goles entre el equipo ganador y el perdedor, así como la variable aleatoria  $Y$  correspondiente a la cantidad de goles que anota el equipo perdedor. Entonces el equipo vencedor obtendrá  $X + Y$  goles, mientras que el perdedor obtendrá  $Y$  goles. Estos resultados numéricos son por supuesto aleatorios, y pueden simularse si se conocen las distribuciones aproximadas de ambas variables aleatorias  $X$  y  $Y$ . Para ello es muy útil un análisis estadístico de los resultados numéricos de los partidos de fútbol, mediante el cual podríamos calcular aproximadamente las distribuciones de  $X$  y  $Y$ .

A falta de esta información estadística, el autor realizó una aproximación empírica de las distribuciones de  $X$  y  $Y$ , basado en reglas sencillas y orientado por el criterio aproximado de expertos. Se calculó la distribución de  $X$  y de  $Y$  como sigue, para el caso en que uno de los equipos resulte ganador (esto es,  $X > 0$ ):

$$\begin{array}{ll} P([X = 1]) = \frac{2}{3} & P([Y = 0]) = \frac{1}{2} \\ P([X = 2]) = \frac{2}{9} & P([Y = 1]) = \frac{1}{3} \\ P([X = 3]) = \frac{2}{27} & P([Y = 2]) = \frac{1}{9} \\ P([X = 4]) = \frac{2}{81} & P([Y = 3]) = \frac{1}{27} \\ P([X \geq 5]) = \frac{1}{81} & P([Y \geq 4]) = \frac{1}{54} \end{array}$$

De esta forma se codificó numéricamente el criterio de los expertos, quienes en su mayoría estiman que —dado que un partido de fútbol finaliza con la victoria de uno de los dos equipos— el vencedor gana por solamente 1 gol de diferencia en las dos terceras partes del tiempo, mientras que cada gol adicional en el resultado final ocurrirá con tres veces menos frecuencia. Por otra parte, la distribución empírica utilizada para  $Y$  sigue aproximadamente los pocos resultados estadísticos que el autor logró obtener.

Aunque estas distribuciones empíricas pueden parecer a primera vista caprichosas al lector, sin embargo se puso a prueba otras distribuciones para ambas variables aleatorias  $X$  y  $Y$ , obteniéndose resultados finales muy similares en todos los casos. Tal parece que se obtendrá muy poca mejoría en la calidad de los resultados de la simulación si se utiliza las distribuciones

estadísticas de  $X$  y de  $Y$ , para cuyo cálculo por otra parte será necesario tomar algunas consideraciones metodológicas nada fáciles de justificar, como por ejemplo decidir si se toman en cuenta solamente resultados de torneos de la misma naturaleza, o si se toman en cuenta resultados de hace 40 años o anteriores, cuando el número de goles en los partidos de fútbol era más abundante, o si se toman en cuenta resultados de torneos similares pero en regiones donde se juega al fútbol con un estilo de juego notoriamente diferente, etc. En todo caso el autor estima, basado en las experiencias desarrolladas, que estos detalles no son de importancia en este modelo de simulación.

### 2.5 Las probabilidades de clasificación y los puntos mágicos

Siguiendo las reglas anteriormente descritas, se completa mediante simulación el torneo en cuestión, repitiendo este proceso millones de veces, tantas como se desee. Un millón de simulaciones es más que suficiente para tales efectos, pues las probabilidades calculadas ya no sufren variaciones en sus primeros 4 decimales.

Se procede a calcular la proporción de veces que cada equipo participante obtiene la clasificación. En los casos que se produzcan empates en los lugares de clasificación, se procede según las reglas de desempate estipuladas para la CONCACAF, cuales son: (i) desempate por gol diferencia; (ii) de persistir el empate, se aplica el desempate por comparación de resultados individuales; (iii) de persistir el empate, se computan con el doble del valor los goles anotados como equipo visitante; (iv) de persistir el empate, se utiliza el azar.

Además se calcula la proporción de veces que un equipo particular — Costa Rica por ejemplo— obtiene la clasificación con una cantidad de puntos mayor o igual a cierto número predeterminado de puntos. De esa forma, se obtiene la tabla de los llamados *puntos mágicos*, que reflejan las probabilidades que posee el equipo en cuestión de clasificar en caso que lograra obtener al final del torneo cierta cantidad total de puntos.

## 3 Ejemplos de algunos resultados de la simulación

En el torneo de la CONCACAF, quizás el momento más importante para definir las aspiraciones de clasificación de Costa Rica al Mundial de Francia 1998 fue el partido jugado contra El Salvador, celebrado en Costa Rica el 10 de agosto de 1997. Además el partido se realizaría coincidiendo con el

Probabilidades actuales de clasificar al Mundial Francia-98				
	Antes del partido con El Salvador, el 10 de agosto	Si ganara Costa Rica	Si quedaran empatados	Si ganara El Salvador
México	96.75%	96.56%	97.10%	96.57%
Costa Rica	58.73%	77.99%	54.02%	35.66%
EEUU	53.81%	52.59%	55.81%	53.24%
El Salvador	31.74%	16.49%	30.12%	56.29%
Jamaica	31.37%	29.99%	33.49%	31.03%
Canada	27.60%	26.37%	29.46%	27.22%

Figura 1: Probabilidades de clasificar al Mundial de Francia 1998 del Torneo de la CONCACAF, bajo diversos escenarios, previo al partido entre Costa Rica contra El Salvador.

inicio de la segunda ronda, cuando todos los equipos ya habían completado sus 5 partidos iniciales.

En la Figura 1. se describe el panorama de las probabilidades de clasificación del torneo de la CONCACAF antes de la celebración de este partido, analizando los diferentes escenarios a los que se llegaría de acuerdo al resultado del partido. Este tipo de tablas se fueron elaborando durante el desarrollo del torneo, actualizando constantemente el modelo de simulación, incorporándole los resultados de los encuentros conforme éstos se iban jugando.

El partido Costa Rica contra El Salvador finalizó con el empate a cero goles, para desilusión de todos los costarricenses, quienes esperaban una fácil victoria y de esa forma acercarse mucho a la ansiada clasificación al Mundial de Francia 1998.

Es ilustrativo el cálculo de las probabilidades  $p_A(t)$ ,  $p_E(t)$ ,  $p_B(t)$ , en este ejemplo concreto. Costa Rica es el equipo local  $A$  y El Salvador el equipo visitante  $B$ . Antes del partido, se habían ya jugado  $N_{\text{tot}} = 15$  encuentros, de los cuales  $N_{\text{emp}} = 6$  quedaron empatados y  $N_{\text{casa}} = 8$  fueron ganados por los equipos locales. Entonces, siguiendo las fórmulas para el cálculo de las probabilidades  $p_A(t)$ ,  $p_E(t)$  y  $p_B(t)$  descritas en la sección precedente,

<b>Puntos totales obtenidos</b>	11	12	13	14	15	16
<b>Probabilidad de clasificar</b>	7.41%	30.46%	68.99%	92.66%	99.25%	99.98%

Figura 2: Los *puntos mágicos*. En la fecha en que se realizó la simulación, acumulando un total de 13 puntos Costa Rica hubiese tenido buenas probabilidades de clasificar: alrededor de un 69%.

obtenemos:

$$p_{\alpha}(t) = \frac{N_{\text{casa}}}{N_{\text{tot}}} = \frac{8}{15} \approx 53.33\% \quad , \quad p_{\beta}(t) = \frac{\frac{7}{15}}{\frac{7}{15} + \frac{5}{15}} = \frac{7}{12} \approx 58.33\%.$$

Luego,

$$\begin{aligned} p_E(t) &= \frac{N_{\text{emp}}}{N_{\text{tot}}} = \frac{6}{15} = 40\% \\ p_A(t) &= \xi(t) \cdot (1 - p_E(t)) \cdot \frac{p_{\alpha}(t) + p_{\beta}(t)}{2} = \frac{67}{200} \approx 33.5\% \\ p_B(t) &= 1 - p_E(t) - p_A(t) \approx 26.5\% \end{aligned}$$

La tabla de los *puntos mágicos* se muestra en la Figura 2. En esos momentos se habían producido muchos empates en el torneo. Por el tipo de competición, cuando se produce un empate “se pierde” un punto, pues cada equipo suma 1 punto (2 en total), en vez de los 3 puntos que suma un equipo cuando obtiene la victoria. Esa gran cantidad de partidos empatados, ligeramente superior a lo esperado, tiene el efecto colateral de reducir un poco el número de puntos que necesita un país para clasificar, desde el punto de vista probabilístico.

Finalmente se presenta en la Figura 3. la evolución en el tiempo de las probabilidades de clasificar que tuvo Costa Rica, a lo largo de todo el torneo de la CONCACAF.

## 4 Conclusiones

Los modelos matemáticos de simulación en el fútbol permiten realizar buenos pronósticos con fundamentación científica, acerca del posible éxito de los










Después del juego entre ...	Probabilidades de clasificar
Al comienzo del torneo:	50.0% 
16 de marzo: Costa Rica 0 – México 0:	42.5% 
23 de marzo: Costa Rica 3 – Estados Unidos 2:	59.4% 
4 de mayo: El Salvador 2 – Costa Rica 1:	45.9% 
11 de mayo: Costa Rica 3 – Jamaica 1:	63.2% 
1 de junio: Canadá 1 – Costa Rica 0:	48.4% 
10 de agosto: Costa Rica 0 – El Salvador 0:	54.0% 
7 de setiembre: Estados Unidos 1 – Costa Rica 0:	33.2% 
14 de setiembre: Jamaica 1 – Costa Rica 0:	8.1% 
9 de noviembre: México 3 – Costa Rica 3:	0.0%
16 de noviembre: Costa Rica 3 – Canadá 1:	0.0%

Figura 3: Evolución de las probabilidades de clasificar de Costa Rica, luego de efectuados cada uno de los partidos que jugó en la CONCACAF.

equipos participantes. Se trata tan solo de un instrumento más que nos ayuda a comprender mejor cuáles son las posibilidades reales que posee cada equipo participante, de acuerdo a los resultados preliminares del torneo y otras circunstancias ponderables.

Sin embargo, debe tenerse presente que debido a la naturaleza misma del fútbol, deporte en el cual interviene mucho el azar y gran cantidad de factores imponderables, estos pronósticos tienen en realidad poco *valor predictivo*, pues obviamente no se puede predecir el futuro. Este aspecto no siempre fue bien comprendido por la prensa deportiva, que le brindó una amplia cobertura a los cálculos realizados con este modelo. Por ejemplo, en cierta oportunidad se publicó un artículo en uno de los periódicos de mayor circulación, muy bien elaborado en todo su contenido a excepción del título del mismo, que con grandes letras rezaba “¡Matemático predice la clasificación de nuestra selección!”.

La amplia publicidad brindada por los medios (prensa, radio y televisión) a los resultados del presente modelo de simulación, durante el desarrollo del torneo de la CONCACAF, obedeció en realidad a un objetivo claro y bien definido, cual era contribuir a subirle la moral al aficionado, pues luego de algunas circunstancias (como el cambio del entrenador Badú y algunos malos

resultados posteriores) la gente había dejado de confiar en su selección.

En cuanto al modelo matemático en sí, algunos aspectos podrían objetarse y modelarse de otras maneras. Se buscó en todo momento conservar un mínimo de hipótesis que afectaran a los resultados, tratando de mantener de esa forma el modelo lo más simple posible. Este modelo brinda una base a partir de la cual se pueden elaborar otros posibles estudios, con algunas variaciones de las hipótesis.

Finalmente, el modelo desarrollado puede emplearse, con ligeras modificaciones según sea el caso, al pronóstico de resultados en otras disciplinas deportivas que se rigen de acuerdo a una dinámica similar al fútbol, esto es, en competencias del tipo “todos contra todos”, tales como por ejemplo el voleibol y el ajedrez, entre otros.

## Referencias

- [1] PRESS, W. & FLANNERY, B. & TEUKOLSKY, S & VETTERLING, W. (1990) *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge Mass.
- [2] RED INTERNET: “*The FIFA / Coca Cola World Ranking*”. En [www.fifa.com/fifa/media/history.teamrank.html](http://www.fifa.com/fifa/media/history.teamrank.html).
- [3] RED INTERNET: “*Arpad Elo: Chess Ratings Developer*”. En [www.cais.net/sunburst/chess/hof\\_elo.html](http://www.cais.net/sunburst/chess/hof_elo.html).

DISEÑO DEL MODELO MATEMÁTICO PARA  
PRODUCIR HUEVOS DE SITOTROGA  
CEREALELLA EN LA UNAN-LEÓN

ENILDA CANO \* – MIRNA ORTIZ\* – ANA CRISTINA ROSTRÁN †

---

La Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua (UNAN-León) inició actividades relacionadas con el parasitoide de huevos de insectos plagas *Trichogramma* en 1985. Las actividades se han orientado a la búsqueda de especies o cepas nativas, el desarrollo de metodología de crianza en condiciones de laboratorio, control de calidad y utilización del parasitoide en cultivos de diferentes regiones del país.

Dada la necesidad de mejorar el sistema de cra para satisfacer la demanda presentada por productores en diversos cultivos como caa de azcar, cucurbitceas, tomate, maz, algodn y soya, el Laboratorio de Control Biológico de la UNAN-Len, el Área de Parasitoides y Depredadores, tiene dentro de sus metas el mejoramiento del sistema de cra del huesped de *Trichogramma*, *Sitotroga cerealella*, el cual es fundamental para su reproducción. Es por ello que se formó un grupo de docentes-investigadores. Los departamentos de Control Integrado de Plagas y de Estadística y Matemáticas desarrollan desde 1996 un plan de investigación para mejorar el sistema de cra existente;

---

\*Laboratorio de Control Biológico, Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua-León, León, Nicaragua.

†Departamento de Estadística y Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua-León, León, Nicaragua.



este plan cuenta con la colaboracin de estudiantes de las carreras de Biologa y Estadstica, los cuales realizan sus trabajos de conclusin de estudios universitarios.

Se han llevado a cabo tres ensayos. El objetivo principal de estos ensayos es disea un modelo matemtico que permita describir el comportamiento de la produccin de *S. cerealella* en el Laboratorio de Control Biolgico. Esta informacin preliminar, es el resultado del modelo, elaborado en el primer ensayo.

Se evaluaron tres sistemas de siembra de huevos de *S. cerealella*, que consisti en: siembra en estantes con densidades de 9 y 12 gramos de huevos, siembra en gabinete de malla metlica y siembra en gabinete con tela. Las variables a estudiar fueron: temperatura interna de los marcos de incubacin a las 8 a.m., 12 m.d., 2 p.m. y 4 p.m., temperatura y humedad de la sala.

Al analizar el efecto del sistema de siembra no encontramos diferencias significativas en la produccin de *S. cerealella*, por tanto hay que establecer la relacin funcional de estas variables. La viabilidad es otro factor determinante para la produccin de huevos, y ésta slo se alcanz en un 5%, lo que evit evaluar el efecto que tendran los diferentes tratamientos a su mxima capacidad de emergencia.

## SCENARIO DEVELOPMENT, QUALITATIVE CAUSAL ANALYSIS AND SYSTEM DYNAMICS

MICHAEL H. RUGE\* – HOWARD KESSLER† – AJIT SINGH‡ – SHAHRAM HEJAZI§

---

The aim of this report is to demonstrate that technology assessments can be supported by methods such as scenario modeling and qualitative causal analysis. At Siemens, these techniques are used to develop preliminary purely qualitative models. These or parts of these comprehensive models may be extended to system dynamics models.

While it is currently not possible to automatically generate a system dynamics model from a qualitative model (or vice versa, obtain a qualitative simulation model from a system dynamics model), the two techniques scenario development and qualitative causal analysis provide valuable indications on how to proceed towards a system dynamics model. For the qualitative analysis phase, the Siemens-proprietary prototype Computer-Aided

---

\* Siemens AG, Health Innovation Field, D-81730 Munich, Federal Republic of Germany, E-mail: Michael.Ruge@mchp.siemens.de

† Fox Chase Cancer Center, Department of Diagnostic Imaging, 7701 Burholme Avenue, Philadelphia, PA 19111, U.S.A.

‡ Siemens Medical Systems, Inc., Imaging Systems Group, 186 Wood Avenue South, Iselin, NJ 08830, U.S.A.

§ Siemens Corporate Research, Inc., Health Innovation Field, 755 College Road East, Princeton, NJ 08540, U.S.A.

The authors wish to thank Dr. Thomas Lauxmann, Dept. ZT BDL, Siemens AG, D-81730 Munich, Federal Republic of Germany for valuable contributions made to this article.

Technology Assessment Software (CATS) supports complete cycle and sub-model analysis.

**Keywords:** Health care, telecommunications, qualitative Model, sensitivity analysis, system dynamics

## SINTONIZACIÓN CON REDES NEURONALES DE UN CONTROLADOR PID APLICADO A UNA UNIDAD DE TURBOGAS

MARCO ANTONIO PAT CASTRO \* - SALVADOR DE LARA JAYME †

---

### Resumen

Se propone un método para sintonizar controladores PID basado en redes neuronales artificiales (RNA). Esta técnica utiliza redes multicapa para aproximar una relación entre la dinámica del sistema con los parámetros óptimos del controlador. La RNA es diseñada para adaptar los parámetros del controlador en línea ante cambios en las condiciones de operación y ambientales del sistema. Para lograr este propósito la RNA tiene un período de entrenamiento fuera de línea. Los resultados que se obtienen son una sintonización continua del controlador sin la necesidad de señales de perturbación.

### Abstract

A method for autotuning PID controllers based on Artificial Neural Networks (ANN) is proposed. This technique employs multilayer networks to approximate the mappings between the system's dynamic and the optimal parameters of the controller. The Neural Network is designed to adapt the parameters online when the operating conditions change on the time. To achieve this objective, the ANN have a training phase off-line. The results obtained are a continuous tuning of the parameters of the controller without the need to use perturbation signals.

## 1 Introducción

En México, las turbinas de gas son equipos ampliamente utilizados en el proceso de generación de energía eléctrica, por lo que es muy importante que trabajen en forma óptima a fin de obtener su máximo desempeño. La velocidad es una de las variables más importantes a controlar en la turbina de gas, por lo que es necesario contar con un sistema de control de velocidad efectivo y confiable, el cual proporcione las herramientas necesarias

\*Instituto Tecnológico de la Laguna, México; e-mail: 54444mpt@axp17.iie.org.mx.

†Instituto de Investigaciones Eléctricas, Cuernavaca, México; e-mail: sdelara@iie.org.mx

para llevar y mantener la turbina de gas dentro de algún funcionamiento deseado. Sin embargo, para lograr esto, es necesario conocer el comportamiento dinámico de la turbina de gas, el cual se caracteriza por ser extremadamente complejo, debido a su naturaleza no lineal [1].

Generalmente, el tipo de controlador que se utiliza para el control de velocidad en las turbinas de gases el PID [2], es un método muy simple pero a la vez muy eficaz y robusto. Sin embargo, es una técnica de control lineal por lo que es necesario ajustarlo a un punto de operación, en donde tendrá un desempeño aceptable, sólo en cierto rango, ya que su funcionamiento se va degradando conforme se aleja de dicho punto. Un método muy ineficaz que es utilizado para encontrar los parámetros del controlador es cuando el operador los ajusta manualmente, lo cual requiere de un gran conocimiento del proceso y que lleva mucho tiempo lograrlo. Afortunadamente se han desarrollado muchas técnicas para sintonizar los controladores PID, pero tienen la desventaja de tener que aplicarse al proceso alguna señal de perturbación, lo que en muchas ocasiones resulta inapropiado. Correspondientemente, en los últimos años, ha existido un gran interés relacionado con el diseño de controladores autosintonizables con base en redes neuronales artificiales [3].

Las redes neuronales ofrecen la posibilidad de realizar acciones de sintonización debido a su naturaleza de aprender y generalizar relaciones no lineales, por lo que pueden capturar alguna relación entre el comportamiento del proceso y los parámetros que debe tener el controlador con base en ese comportamiento.

Es este trabajo se propone un método para sintonizar un controlador PID aplicado a una unidad de turbogas mediante redes neuronales artificiales. El método se basa en la generalización que realiza la red neuronal de ciertos valores aprendidos de diferentes módulos de control de ganancias programadas, cuyos valores fueron obtenidos por el método de sintonización del relevador [4].

## 2 Controladores PID

El controlador PID consta de una parte proporcional (P), una integral (I) y una derivativa (D). La parte proporcional tiene el objetivo de acelerar la respuesta del sistema, pero tiene la desventaja de crear un *offset* de estado estable; la parte integral tiene el objetivo de reducir este *offset* pero crea sobretiro y la parte derivativa tiene el objetivo de reducir el sobretiro [5]. Una función de transferencia de un controlador PID puede ser la siguiente:

$$U(s) = K_c \left[ (\beta r(s) - Y(s)) + \frac{1}{\tau_i s} E(s) - \frac{\tau_d s}{N s + 1} Y(s) \right] \quad (1)$$

donde  $K_c$  es la constante proporcional,  $\tau_i$  es la constante de tiempo integral y  $\tau_d$  es la constante de tiempo derivativo. La parte derivativa es filtrada por un retardo de primer orden con constante de tiempo de  $\tau_d/N$  donde a  $N$  normalmente se le asigna el valor de 10, y  $\beta$  es un valor que se le añade a la referencia con el fin de mejorar su funcionamiento ante cambios en la referencia.

La mayoría de los métodos de sintonización se basan en los trabajos realizados por Ziegler y Nichols en 1942 [6]. Ellos encontraron una relación heurística entre los parámetros

óptimos del controlador relacionado a ciertas características dinámicas del proceso. En 1984 Åström y Hagglund encontraron un método basado en un relevador acoplado en lazo cerrado con la planta [7]. El método tiene como objetivo hacer llegar la planta al límite de estabilidad (punto crítico) donde la planta oscila a cierta frecuencia (frecuencia última) y con cierta amplitud (ganancia última), donde estos valores aplicados a las reglas de Ziegler-Nichols dan como resultado los parámetros óptimos del controlador. El modo de operar de este método es aplicar el relevador, cuando se requiera sintonizar al controlador, ya sea a solicitud del operador o basado en ciertas situaciones que se presenten durante el funcionamiento del sistema. Una vez que se encuentran los parámetros óptimos del controlador, este se vuelve a conectar a su estructura original (fig. 1).

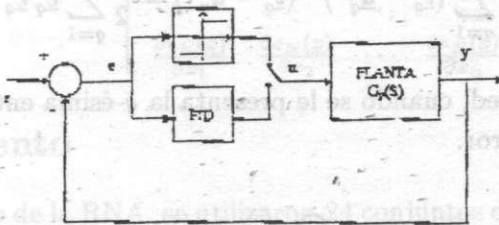


Figura 1: Esquema de un control PID en lazo cerrado con un relevador para la sintonización

### 3 Redes neuronales multicapa

Una red neuronal multicapa es una red que está compuesta de una capa de entrada (capa distribuidora de las entradas a la siguiente capa), una capa de salida y al menos una capa intermedia [8]. La relación entrada-salida de una neurona  $i$  en la capa  $k + 1$ , se describe por las siguientes ecuaciones:

$$n^{k+1}(i) = \sum_{j=1}^{S_k} w^{k+1}(i, j) a^k(j) + b^{k+1}(i) \quad (2)$$

la salida de la neurona  $i$  será

$$a^{k+1}(i) = f^{k+1}(n^{k+1}(i)) \quad (3)$$

Para una red de  $M$  capas, el sistema de ecuaciones en forma matricial estará dado por

$$\begin{aligned} \underline{a}_0 &= \underline{p} \\ \underline{a}^{k+1} &= \underline{f}(\mathbf{W}^{k+1} * \underline{a}^k + \underline{b}^{k+1}) \\ k &= 0, 1, \dots, M - 1 \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $\underline{a}^{k+1}$  es el vector de salidas de la capa  $k + 1$ ,  $\mathbf{W}^{k+1}$  es la matriz de pesos entre las capas  $k$  y  $k + 1$ ,  $\underline{b}^{k+1}$  es el vector de umbrales de la capa  $k + 1$ , y normalmente se utiliza una función sigmoïdal para  $f(\bullet)$ .

La tarea de una red neuronal es aprender alguna asociación entre conjuntos específicos de pares entrada-salida

$$\left\{ (p_1, t_1), (p_2, t_2), \dots, (p_Q, t_Q) \right\}$$

donde  $p_n$  es un vector de entradas a la red, y  $t_n$  es su vector de salidas deseadas correspondiente.

El algoritmo de entrenamiento utilizado es el de *backpropagation* (retropropagación), el cual ajusta los pesos y umbrales entre neuronas al minimizar una función costo (Ec. 5).

$$V = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q (t_q - a_q^M)^T (t_q - a_q^M) = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q e_q^T e_q \quad (5)$$

donde  $a_q^M$  es la salida de la red, cuando se le presenta la  $q$ -ésima entrada,  $p_q$  es la  $q$ -ésima entrada y  $e_q$  es el  $q$ -ésimo error.

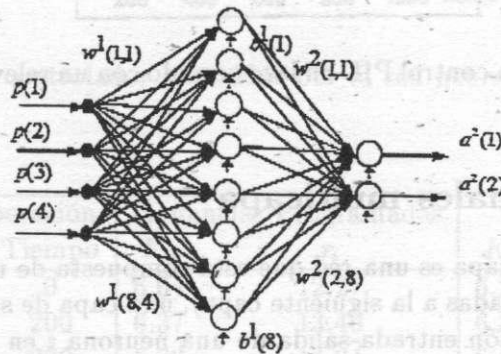


Figura 2: Ejemplo de una red neuronal con entradas dos neuronas de salida y 8 neuronas intermedias.

El método del gradiente, también llamado método del paso descendente, es una de las técnicas de optimización más simples usadas para la minimización de la función costo y se basa en las siguientes ecuaciones:

$$\Delta w^k(i, j) = -\alpha \frac{\partial \hat{V}}{\partial w^k(i, j)} \quad (6)$$

$$\Delta b^k(i) = -\alpha \frac{\partial \hat{V}}{\partial b^k(i)} \quad (7)$$

donde  $\alpha$  es la razón de aprendizaje.

El método del gradiente es una técnica de muy lenta convergencia, ya que se basa en reducir el error mediante el movimiento de los pesos y umbrales de la red en dirección opuesta al gradiente del error. Para los propósitos de este trabajo se utilizó el método de

Levenberg-Maquardt que es una técnica más poderosa y de mucho más rápida convergencia [9]. El algoritmo está basado en la siguiente expresión

$$\Delta \underline{x} = [\mathbf{J}^T(\underline{x})\mathbf{J}(\underline{x}) + \mu\mathbf{I}]^{-1} \mathbf{J}^T(\underline{x})\underline{e}(\underline{x}) \quad (8)$$

donde  $\mathbf{J}$  es la matriz jacobiana (Ec. 9) de los errores con respecto a un vector  $\underline{x}$  (vector de todos los pesos y umbrales de la red), y  $\mu$  es un escalar.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_1(\underline{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial e_1(\underline{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial e_1(\underline{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial e_2(\underline{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial e_2(\underline{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial e_2(\underline{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial e_N(\underline{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial e_N(\underline{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial e_N(\underline{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (9)$$

## 4 Entrenamiento

Para el entrenamiento de la RNA, se utilizaron 24 conjuntos de datos, recolectados del funcionamiento de la turbina de gas en 24 arranques a condiciones ambientales y de arranque diferentes.

La parte derivativa del controlador fue suprimida, ya que arrojó mejores resultados sin ella, por lo que sólo se utilizó un controlador PI. Los parámetros óptimos del controlador fueron calculados previamente mediante el método del relevador en diferentes puntos de operación de la turbina de gas, y se aplicaron al sistema en forma de un módulo de ganancias programadas. El cambio de los parámetros del controlador entre los diferentes puntos de operación se suaviza mediante una interpolación *spline*.

Los datos seleccionados para el entrenamiento de la RNA, son: la señal de referencia (señal actual y sus tres valores anteriores), la señal de salida (señal actual y sus tres valores anteriores) y la temperatura ambiente, estos son valores que caracterizan la dinámica del sistema, por lo que la red neuronal se basa en ellos para encontrar los valores óptimos del controlador.

Como se mencionó anteriormente, los datos de entrenamiento se obtienen en 24 procesos de arranque de la turbina de gas a diferentes condiciones, los datos capturados, se obtuvieron desde el inicio del arranque, hasta aproximadamente 1100 segundos, que es donde se alcanza el nivel de estado estacionario en todos los casos. El control digital de velocidad tiene un tiempo de muestreo de 1 segundo, y los datos que se obtuvieron para el entrenamiento fueron obtenidos cada 30 segundos, además de omitirse los datos donde el control de velocidad aún no se encuentra en operación. En total el número de vectores de entrada-salida que se utilizaron para el entrenamiento de la RNA fueron de 792.

Antes del entrenamiento, tanto los datos de entrada como los de salida, tienen una etapa de normalización, donde sus valores se limitan a un rango entre cero y uno. Las señales de referencia, y de salida, se normalizan conjuntamente con el fin de no perder la relación que existe entre ellas. Los valores restantes se normalizan a una cantidad proporcional a la normalización mencionada anteriormente y por su parte ambos valores de salida también se normalizan en conjunto con el fin de mantener su relación y hacer el



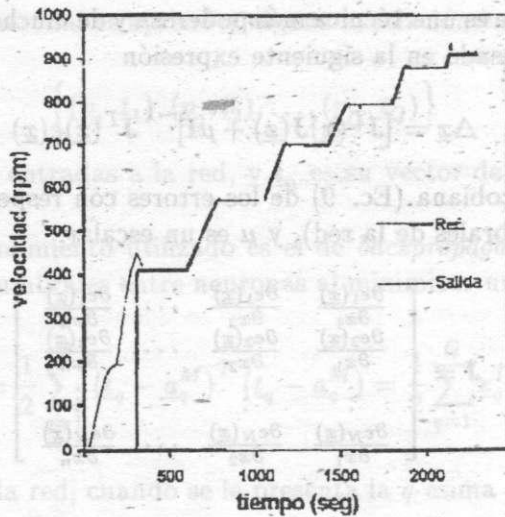


Figura 3: Diagrama que muestra el uso del relevador para la sintonización del controlador en diferentes puntos de operación, durante el arranque de la turbina de gas.

trabajo de aprendizaje más efectivo, ya que la RNA logra la generalización encontrando alguna relación entre los parámetros de entrenamiento.

El proceso de entrenamiento, se llevó a cabo utilizando el algoritmo de Levenberg-Marquardt; probándose para diferentes números de neuronas en la capa intermedia. Finalmente se utilizó la RNA con 8 neuronas intermedias que fue la que mejores resultados arrojó.

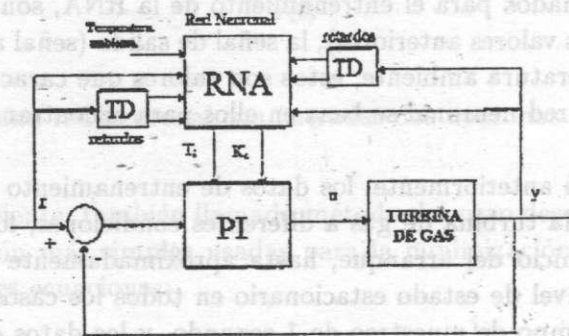


Figura 4: Diagrama de bloques del esquema de sintonización del controlador PI mediante redes neuronales.

### 5 Implementación y resultados

Los valores de los pesos y umbrales que se obtuvieron del proceso de aprendizaje de la RNA, se almacenaron en una RNA conectada en línea con el proceso, como lo muestra la

figura 4. Al poner en marcha a la turbina de gas, la RNA actualiza constantemente los valores de los parámetros del controlador.

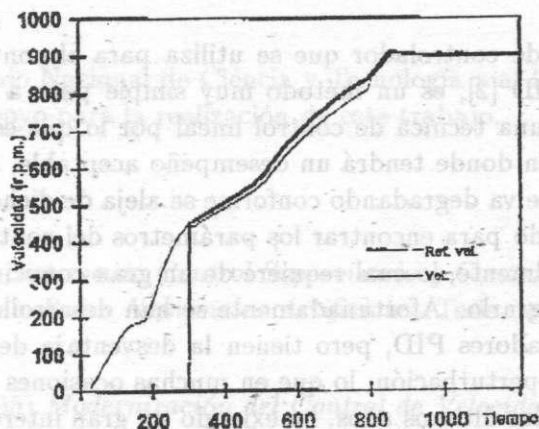


Figura 5: Funcionamiento de la turbina de gas con el controlador PI original.

La figura 5 muestra el comportamiento del control original para ciertas condiciones operacionales que son desconocidas por la RNA. La figura 6 muestra el comportamiento de la turbina de gas bajo la acción de sintonización de la RNA, para las condiciones operacionales desconocidas. Puede observarse una notable mejoría, ya que el controlador que está siendo sintonizado por la RNA ofrece una respuesta que sigue muy de cerca a la señal de referencia.

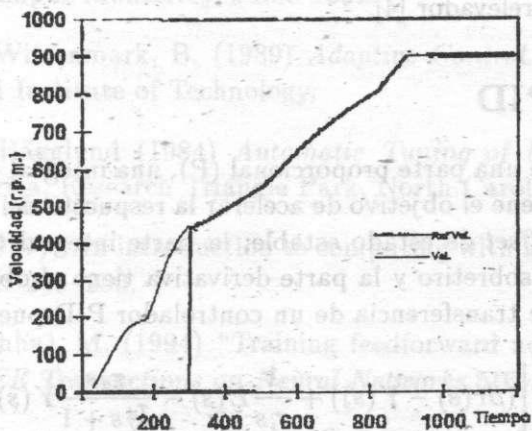


Figura 6: Funcionamiento de la Turbina de gas con el controlador PI sintonizado por las redes neuronales.

La figura 7 muestra una aproximación de la comparación entre los parámetros que obtiene la RNA y los que se obtienen de un control con ganancias programadas. Este último requiere de un período de arranque previo, a fin de obtener las ganancias óptimas por el método del relevador. En el caso de la RNA ya no es necesario, puesto que logró la

generalización únicamente de los parámetros que se le mostraron durante el entrenamiento.

La tabla 1 muestra una comparación entre los parámetros que obtiene previamente una sintonización por el método del relevador y los parámetros que obtiene una sintonización continua por medio de las redes neuronales.

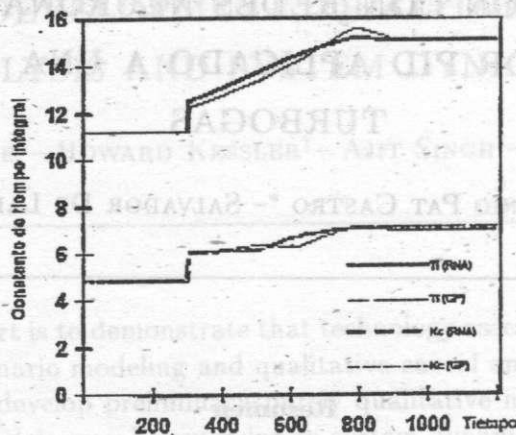


Figura 7: Parámetros del controlador obtenidos por la red neuronal y por el módulo de ganancias programadas.

Punto de operación		Ganancias Programadas		RNA	
Velocidad	Tiempo	$K_c$	$\tau_i$	$K_c$	$\tau_i$
440	0	6.04	12.27	6.24	12.98
557.5	200	6.37	13.40	6.34	13.81
675	290	6.32	14.24	6.60	14.70
792.5	400	7.15	15.58	7.14	15.53
910	500	7.01	15.15	7.01	15.17

Tabla 1: Comparación entre los parámetros del controlador para diferentes puntos de operación.

## 6 Conclusiones

Se ha propuesto un método para la sintonización en línea de un controlador PID aplicado a una turbina de gas, y donde se utilizó una red neuronal para dicho fin. Los resultados obtenidos fueron satisfactorios, ya que la RNA encuentra valores muy cercanos a los que se obtienen por el método clásico de sintonización del relevador. La gran ventaja que ofrece el sintonizador basado en RNA es que no requiere de perturbaciones adicionales para la sintonización.

En cuanto al funcionamiento en general, se obtienen una mejor respuesta comparada con el anterior controlador PI, ya que se le añadió la característica de autosintonización.

En consecuencia el controlador tendrá parámetros mas aproximados a los óptimos que en el caso de tener un sólo juego de parámetros para un funcionamiento en particular.

### Agradecimientos

Se agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología y al Instituto de Investigaciones Eléctricas, por su apoyo para la realización de este trabajo.

### Bibliografía

- [1] Parra, R. (1996) *Sistema de Control Supervisorio y Control de Velocidad de Turbinas de Gas basados en Redes Neuronales-Artificiales*. Tesis de Maestría, IIE-CENIDET, Marzo 1996.
- [2] Ramírez, M. (1995) *Modernización del Control de Velocidad, Potencia y Temperatura de una Unidad Turbogas*. Tesis de Licenciatura IIE-IPN, Noviembre 1995.
- [3] Hunt, K.; Sbarbaro; Zbikoski; Gawthrop (1992) "Neural networks for control systems-A survey", *Automatica* 28(6): 1083-1112.
- [4] De la Garza, J. A. (1995) *Controlador PID Autosintonizable: Aplicado a dos Lazos de Regulación del Generador de Vapor de una Central Termoeléctrica de Ciclo Combinado*. Tesis de Maestría IIE-CENIDET, Julio 1995.
- [5] Zavala, A. (1992) *Autosintonización de Control de Controladores PID*. Tesis de Maestría, ITESM Campus Monterrey, Junio 1992.
- [6] Åström, K.J.; Wittenmark, B. (1989) *Adaptive Control*. Addison-Wesley Publishing Company, Lund Institute of Technology.
- [7] Åström, K.J.; Hägglund (1984) *Automatic Tuning of PID Controllers*. Instrument Society of America, Research Triangle Park, North Carolina.
- [8] Lipmann, R. (1987) "An introduction to computing with neural networks", *IEEE ASSP Magazine*, Abril: 245-250.
- [9] Hagan, M.; Menhaj, M. (1994) "Training feedforward networks with the Marquardt algorithm", *IEEE Transactions on Neural Networks* 5(6): 989-993.

## AN APPLICATION OF FUZZY COGNITIVE MAPS FOR STUDYING LABOR CLIMATE SYSTEMS

ARTURO AGUILAR VÁZQUEZ \* - JOSÉ C. ROMERO CORTÉS \*

### Abstract

In this paper is proposed a fuzzy neural model based on fuzzy cognitive maps approach, the model is applied to the system that is found when we face workplace labor climate problems. This paper starts from an outline of a general workplace labor climate model, from there it is discussed how this model can be considered as a fuzzy neural network with an explicit and fuzzy feedback relationship among its components: workplace labor climate variables; finally, the model that we propose is applied to overall findings of a previously reported study and results obtained are commented. The model proposed can include also many-experts opinion's. Our main aim in this paper is contribute to elucidate structural relationship and dynamic behavior inherently involved in workplace labor climate systems.

**Keywords:** Fuzzy neural network models, fuzzy cognitive maps, labor climate model, fuzzy feedback relationship, workplace industrial relations climate.

### Resumen

En este artículo se propone un modelo neuronal difuso basado en el enfoque de funciones cognoscitivas difusas. El modelo es aplicado al sistema que se encuentra cuando se aborda el problema de clima laboral. El trabajo empieza presentando un modelo general de clima laboral, luego se discute cómo este modelo puede ser considerado como una red neuronal difusa con una relación de retroalimentación explícita y difusa, entre sus componentes, las variables del clima laboral. Finalmente, el modelo que proponemos es aplicado a los resultados obtenidos anteriormente en un estudio reportado, y los resultados obtenidos son comentados. El modelo propuesto puede también incluir muchas opiniones de expertos. Nuestro principal objetivo en este artículo es contribuir a dilucidar las relaciones estructurales y el comportamiento dinámico inherente en los sistemas de clima laboral.

**Palabras clave:** Modelos de redes neuronales difusas, funciones cognoscitivas difusas, modelo de clima laboral, relación de retroalimentación difusa, relaciones de clima laboral industrial.

\*Departamento de Sistemas, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, México D.F., México;  
e-mail: aav@ho9000a1.uam.mx

## 1 Introduction

In labor climate context relations between workers and management are never at rest, but they are dynamic all the time. If we try we can distinguish long-range and short-range influences in these relations, as it can be observed in Figure 1.

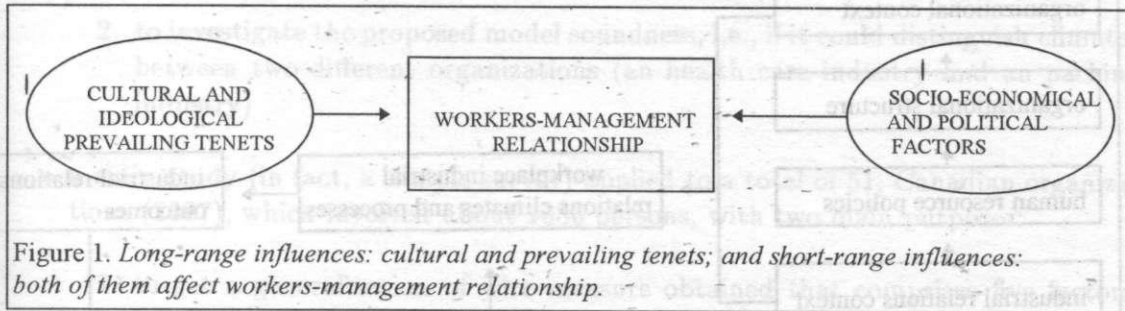


Figure 1. Long-range influences: cultural and prevailing tenets; and short-range influences: both of them affect workers-management relationship.

In former case, changes in cultural and prevailing tenets towards democracy, authority and value of work possibly will affect workers-management relation, at least at an attitudinal level. In latter case, size of labor and product market, product technological level, presence or absence of government intervention in work relations, and kind of union prevailing in firm comprises major short-range influences. The final result is that workplace relations contain a dynamic element in their nature, so if we model this relations we must take into account workplace relations dynamic structure. Fortunately, this labor climate dynamic model has been successfully created recently by Dastmalchian et al (1991), and we are going to synthesize it in next section.

## 2 The labor climate model

Considering current literature on industrial relations and organizational theory, four categories of organization-level INPUTS are defined which have a potential impact on workplace relations climate PROCESS and on industrial relations OUTCOMES, as we can see in Figure 2, where it is evident feedback characteristic of the whole system.

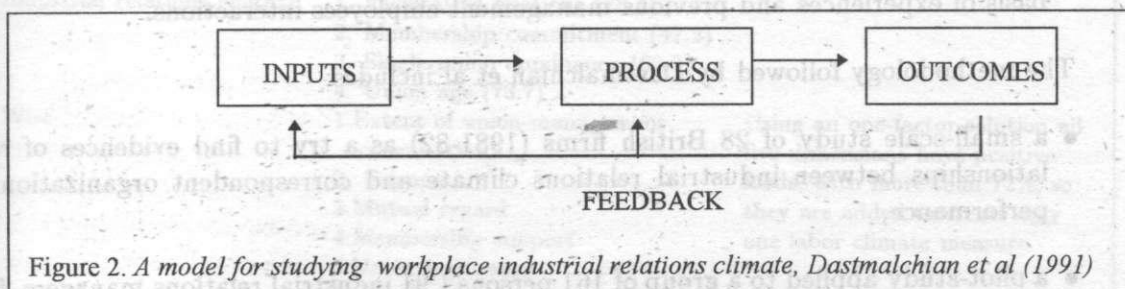
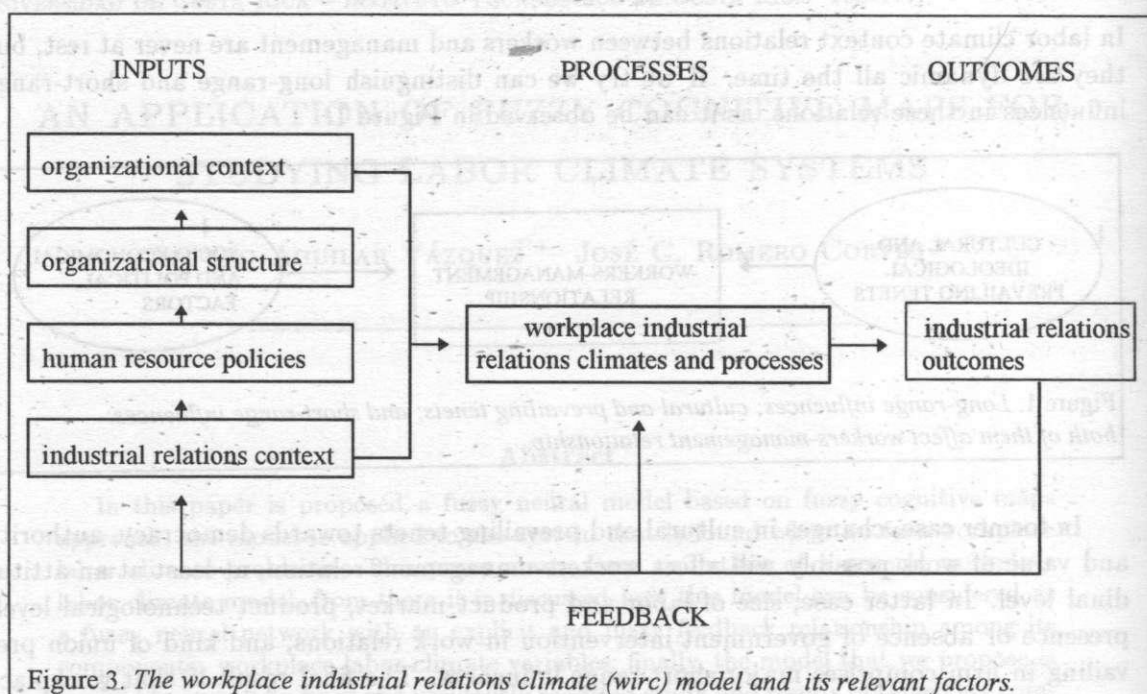


Figure 2. A model for studying workplace industrial relations climate, Dastmalchian et al (1991)

The four organizational-level inputs are: organizational context, organizational structure, human resource policies and industrial relations context; feedback is shown explicitly,

as a major characteristic of complex systems, in the whole model structure of Figure 3.



Flux diagram shown in Figure 3 allow us to confirm the fact that wirc systems are not static, but dynamic; as it can be inferred in next points of view:

- Outcomes obtained in one period in turn affect kind and strength of inputs and climate of next period.
- Climate of workplace relations- ( nature of self-confidence, degree of trust, level of co-operation, and like) will be influenced by previous experience of last bargaining round.
- In general, attitudes and expectations in wirc context are formulated mainly on the basis of experiences and previous management-employees interactions.

The methodology followed by Dastmalchian et al includes:

- a small-scale study of 28 British firms (1981-82) as a try to find evidences of relationships between industrial relations climate and correspondent organizational performance,
- a pilot-study applied to a group of 161 persons ( 91 industrial relations managers, 55 union representatives, and 15 arbitrators) in Canada (1986) to determine relevance of 40 statements designed to capture some dimensions of workplace industrial relations climate (wirc),

- a validation-study (1989) that comprises a 26-item questionnaire that was applied to two organizations in Canada, the goals in this study were:
  1. to test wirc measure founded in previous pilot-study based on 26 items related to six dimensions: union-management co-operation, mutual regard, apathy, joint participation, trust/fairness, hostility/aggression
  2. to investigate the proposed model soundness, i.e., if it could distinguish climates between two different organizations (an health care industry and an packing industry)
- a main-study (in fact, a sample survey) applied to a total of 51, Canadian organizations (1987), which involved about 1686 persons, with two main purposes:
  1. to get a generalization of wirc measure obtained that comprises five factors: harmony, openness, hostility, apathy and promptness;
  2. to test feasibility of whole labor climate model
- a longitudinal study applied to 14 of 51 original organizations from main study to get information about dynamic nature of changes in organizations involved.

In overall model that includes six categories of variables sketched in Figure 3, Dastmalchian et al found, by applying factor analysis techniques, that relevant factors are those shown in Figure 4, where numbers in parenthesis are indicating percent of variance of correspondent factor.

CATEGORY	MAIN FACTORS	MAIN VARIABLES
Organizational context	1. Branch plant orientation (30.2) 2. Instability (50.2)	1. Size 2. Age 3. Labor market dependency
Organizational structure	1. Flexibility design (36.7) 2. Bureaucratic design (58.8)	
Human resource policies	1. Internal labor market 2. Training 3. Human resource changes	
Industrial relations context	1. Facilitative relations (28.4) 2. Membership commitment (47.2) 3. Single union dominance (62.2) 4. Union age (73.7)	
Wirc	1. Extent of union-management consultation 2. Fairness 3. Mutual regard 4. Membership support 5. Union legitimacy.	Using an one-factor solution all five dimensions have positive loads, with more than 72%, so they are added to create only one labor climate measure.
Industrial relations outputs		1. Employees 2. Union-management interaction 3. Union and unions membership

Figure 4. Relevant factors and/or variables for six categories defined in Dastmalchian model.



### 3 Test of labor climate model

#### 3.1 Correlational analysis study

In testing their model, Dastmalchian et al start from a correlational analysis of 11 input factors (including size of organizations sampled), wirc and industrial relations outputs (iro). In terms of wirc correlational study shows that organizational contexts with more stability and more facilitative relations tend to be associated with more favorable wirc's.

#### 3.2 Multiple regression analysis study

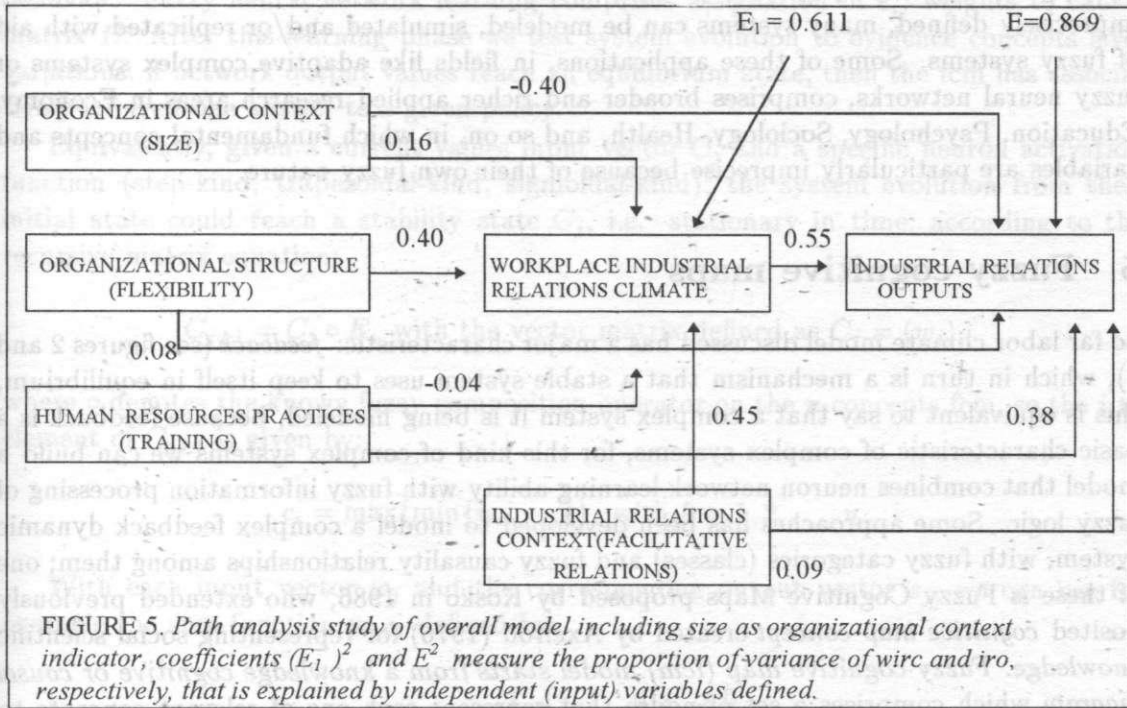
Next step taken by Dastmalchian et al. was a series of multiple regressions to examine the real influence of wirc on iro in organizations involved. First they considered wirc factor, or simply climate variable, as an dependent variable of input variables aggregated in four categories shown in figures 3 and 4, with branch plant orientation and instability as representing organizational context category. Similarly and subsequently, they considered iro variable as a dependent variable of input aggregated variables, including climate variable as an independent variable. The outstanding result of this regression study indicate that:

- significant input variables for climate and iro variables are: flexible design, facilitative relations, training; in addition to branch plant orientation and instability previously mentioned.
- in both cases, training and climate are the most significant variables for explain iro variable.
- when overall model was tested, firstly not including climate variable and then including it, inclusion of climate variable increases explanatory power of regression equations, observed increase was around 26%.

#### 3.3 Path analysis study

To investigate results already obtained, Dastmalchian et al applied path analysis to the set of significant variables founded. Path analysis models obtained explain around 37% of climate variance, and about 65% of variance of industrial relations outcomes (iro). Two main results of this study are: branch plant orientation and structure flexibility impact more indirectly than directly on iro, through their impact on climate; and training has the most important direct effect on iro than any other of input variables. Context variables were desegregated to refine previous analysis, in this phase was applied again a path analysis with organizational context being represented by: age, size and labor market dependence, separately. Figure 5 include diagrams of standardized regression coefficients in usual form of path analysis conventions, and results of tests of overall model when size

represents organizational context indicator.



#### 4 Fuzzy systems

In labor climate context we face real world vagueness problem because its language is fully supplied with vague and imprecise concepts such as: *ICA labor climate is very nice*, or *at K Mart we enjoy a heavy labor climate*. But when one wants to allow for natural language queries we must search for those fuzzy meanings of natural language. Fuzzy systems is alternative to notions of classical logic and set theories, its origins are in ancient Greek philosopher Heraclitus who proposed that things could be simultaneously true and false, oppositely to prevailing Aristotle's Law of the Excluded Middle, around sixth century BC. In early 1900's Jan Lukasiewicz proposed a systematic alternative to bi-valued logic of Aristotle, and until 1965 Lotfi A. Zadeh described the mathematics of fuzzy set theory and, by extension laid the foundation of fuzzy logic, developed new operations for calculus of logic as a generalization of classic logic, thus provided a broader richer field of fuzzy data than do classical methods. Fuzzy systems basic concept is that membership values, in fuzzy sets, or truth values, in fuzzy logic, has associated a value in close interval  $[0.0, 1.0]$ , such that Falseness is representing by 0.0 and Truth is representing by 1.0. Next step to set a complete system of fuzzy logic is to define the algebra of fuzzy sets: empty fuzzy set, equality of fuzzy sets, complement of a given fuzzy set, containment of fuzzy sets, union (OR) of fuzzy sets, intersection (AND) of fuzzy sets. Finally, another important feature of fuzzy systems is the *edge* concept, i.e. the modifier of fuzzy values; these modifiers

provided that fuzzy statements keep close relation with natural language, and allow us to generate fuzzy statements through mathematical calculations.

Applications of fuzzy systems provide a chance to model conditions that are inherently imprecisely defined, many systems can be modeled, simulated and/or replicated with aid of fuzzy systems. Some of these applications, in fields like adaptive complex systems or fuzzy neural networks, comprises broader and richer applied research areas in Economy, Education, Psychology, Sociology, Health, and so on, in which fundamental concepts and variables are particularly imprecise because of their own fuzzy nature.

## 5 Fuzzy cognitive maps

So far labor climate model discussed has a major characteristic: *feedback* (see figures 2 and 3), which in turn is a mechanism that a stable system uses to keep itself in equilibrium, this is equivalent to say that a complex system it is being modeled, because feedback is a basic characteristic of complex systems, for this kind of complex systems we can build a model that combines neuron network learning ability with fuzzy information processing of fuzzy logic. Some approaches has been developed to model a complex feedback dynamic system, with fuzzy categories (classes) and fuzzy causality relationships among them; one of these is Fuzzy Cognitive Maps proposed by Kosko in 1986, who extended previously posited *cognitive map concept* created by Axelrod (1976) for representing social scientific knowledge. Fuzzy cognitive map (fcm) model starts from a knowledge cognitive or *causal diagram* which comprises a set of nodes that represent each one of relevant concepts to study system, and corresponding connections (edges) among them. Let  $e_{ij}$  represent the value of causal relation between concept  $C_j$  and concept  $C_i$  on the map, then the  $n \times n$  weight matrix of a  $n$ -concepts (neurons) system is:

$$E = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \cdots & e_{nn} \end{pmatrix}$$

So element  $e_{ij}$  of  $E$  is the weight associated with causal relation between  $j$ -th and  $i$ -th concepts (neurons). The directed edge  $e_{ij}$  take values in fuzzy causal interval  $[-1, 1]$ , according to:

$e_{ij} = 0$  indicates no causality;  $e_{ij} > 0$  indicates causal increase,  $C_i$  increase as  $C_j$  increase and  $C_i$  decrease as  $C_j$  decrease;  $e_{ij} < 0$  indicates causal decrease or negative causality,  $C_i$  increase as  $C_j$  decrease and  $C_i$  decrease as  $C_j$  increase. FCM-based model comprises a model of the world as a collection of classes (or categories) and of causal relations between classes defined.

The weight matrix  $E$  defined include as a particular case the simplest one: when  $e_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ , so, if causality occurs, it occurs to a maximum (negative or positive) level. These simple fcm's-based models provide a first approximation to an expert's stated causal knowledge, Kosko (1992).

Additionally there is the causal feedback loops occurrence in most of fcm's, this fact allow us to consider them as a dynamical system that eventually reach its equilibrium behavior. Fuzzy neural network learning comprises assignation of  $e_{ij}$  weights to causal matrix  $E$ . After this learning phase we test system evolution to evidence concepts level variations, if network output values reach an equilibrium state, then the fcm has associatively inferred one answer to a given policy.

Equivalently, given a current values input vector  $C_j$  and a specific neuron activation function (step-kind, trapezoidal-kind, sigmoidal-kind), the system evolution from their initial state could reach a stability state  $C_j$ , i.e. stationary in time, according to the recursive matrix equation:

$$C_{j+1} = C_j \circ E, \text{ with the vector matrix defined as } C_j = (w_j),$$

where  $\circ$  denotes the known fuzzy composition operator on the  $n$ -concepts fcm, so the  $i$ -th element of  $C_{j+1}$  is given by:

$$c_i = \max\{\min\{w_k, e_{kj}\}\}, \text{ with } k = 1, 2, \dots, n.$$

With each input vector  $w_j$  and the corresponding output vector  $s_j$ , we can use for example the step function  $w_{j+1}$  defined by:

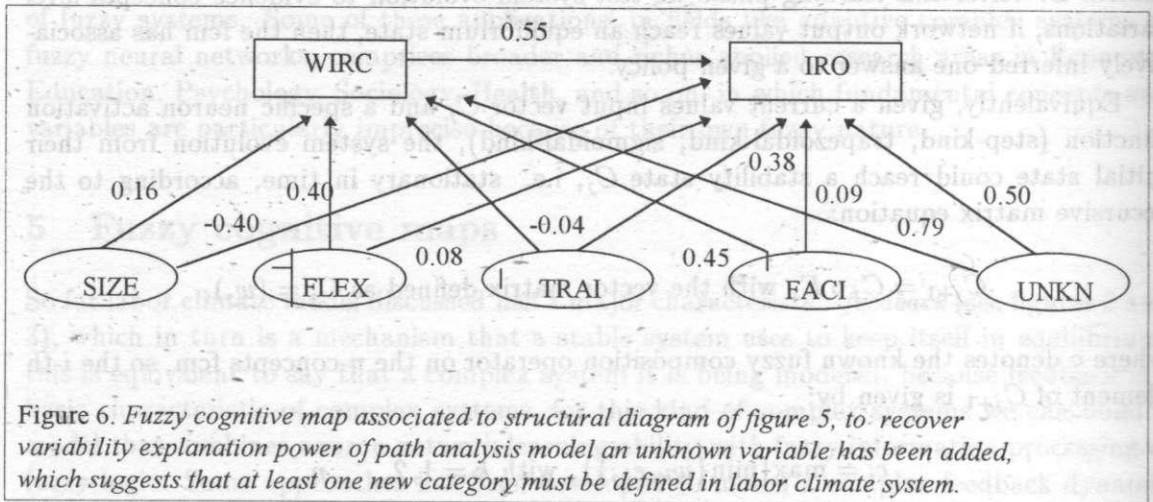
$$w_{j+1} = \begin{cases} 1 & \text{if } s_j > 0 \\ s_{j+1} & \text{if } s_j = 0 \\ 0 & \text{if } s_j < 0 \end{cases}$$

When this occurs  $C_j$  becomes a fixed point of fcm dynamic system and, given an input vector  $C_j$ , the fcm model associatively infer time stationary state  $C_j^*$ .

## 6 The fcm model of labor climate system

Let us consider path analysis structural diagram shown in Figure 5. The coefficients  $[1 - (E_1)^2]$ , and  $[1 - E^2]$  represent proportion of variance of labor climate variable (in this case 62.7%) and industrial relations outputs variable, respectively, that it is not explained by independent (input) variables given, but by others unknown variables not included in this path analysis model. In addition to regression coefficients shown in figure are standardized, so its numerical value for two given variables is equal to the numerical value of correlation coefficient associated to those variables. It is known that correlation coefficient  $\theta_{ij}$  measure the degree of association between two variables  $i$  and  $j$ , with  $\theta_{ij} \in [-1, 1]$ , thus conceptually  $\theta_{ij}$  plays an analogue role to the one played by causal correlation coefficient  $e_{ij}$  previously defined. Hence, we can posit a fuzzy cognitive map for that path analysis structural diagram by including an unknown variable (unkn) which has a correlation coefficient associated of around 79.2%, respect to labor climate variable, and 49.5% respect to industrial relations output variable. The obtained fuzzy cognitive map

is shown in Figure 6 for unidirectional Dastmalchian et al. case, i.e. just one arrowhead in each significant path coefficient.



## 7 Results

For fuzzy cognitive map shown in Figure 6, the associated weight matrix is:

	SIZE	FLEX	TRAI	FACI	UNKN	WIRC	IRO
SIZE	0	0	0	0	0	0.16	-0.40
FLEX	0	0	0	0	0	0.40	0.08
TRAI	0	0	0	0	0	-0.04	0.38
FACI	0	0	0	0	0	0.45	0.09
UNKN	0	0	0	0	0	0.79	0.50
WIRC	0	0	0	0	0	0	0.55
IRO	0	0	0	0	0	0	0

It is clear that we can also consider bi-directional analysis diagrams because correlation coefficient measure the degree of association between two variables given, in two possible directions between them, in that case the  $(6 \times 6)$  weight matrix associated to labor climate fuzzy cognitive map will have all its columns and all its rows different from zero. In two cases commented we can find time stationary states for some interesting initial state vectors

$C_j$  which are shown in Figure 7.

INITIAL STATE ( $C_j$ )	TIME STATIONARY STATE ( $C_j^*$ )	
	(unidirectional case)	(bi-directional case)
1 0 0 0 0 0 0	1 0 0 0 0 1 1	0 1 1 1 1 1 1
0 0 0 0 1 0 0	0 0 0 0 1 1 1	0 1 1 1 1 1 1
0 1 0 1 0 0 0	0 1 0 1 0 1 1	0 1 1 1 1 1 1
0 1 0 1 1 0 0	0 1 0 1 1 1 1	0 1 1 1 1 1 1
0 0 0 1 1 0 0	0 0 0 1 1 1 1	0 1 1 1 1 1 1

Figure 7. Some interesting cases of input vectors including an unknown class  $C_5$ , according to fcm of figure 6, and associated time stationary states which are the same in bi-directional case.

## 8 Conclusions

As it can be observed, bi-directional case is non sensitive to different initial cases, so in present labor climate study it is not useful to elucidate dynamic behavior involved in this kind of process. Oppositely, unidirectional case lead us to some important consequences: when unknown variable or class  $C_5$  is the only one included, this class influence strongly on that unknown class (that it must be defined in future labor climate investigations) and on labor climate (wirc) and industrial relations outputs (iro) variables. It is not clear how size variable influence on wire and iro variables indirectly through input variables remaining, but of these the most important variables are Flexibility Design of Organizational Structure and Facilitative Relations of Industrial Relations Context, as it can be inferred in third and fourth cases; in fifth case it can see that Flexibility Design is inclusive at least as important as the unknown class to explain high values observed in wirc and iro variables. Finally, it might be useful to mention about the possibility of building a fuzzy model that considers "input" (size, flexi, trai and faci) variables, "system" (unknown and wirc) variables, and "output" variables (iro), i.e. a fuzzy weighted neural network model with three layers; this kind of model has been successfully applied to specific socio-economical systems recently in several situations: optimistic and pessimistic (or crisis) scenarios, Lara-Rosano (1995). We hope that this paper contributes to improve current perspective of labor climate systems.

## References

- [1] Dastmalchian, A. et al (1991) *The Climate of Workplace Relations*. Routledge. Great Britain.
- [2] Kosko, B. (1992) *Neural Networks and Fuzzy Systems*. Prentice Hall. USA.
- [3] Lara-Rosano F. (1995) "Fuzzy Causal Impact Connectionist Models of Dynamic Systems", *Advances in Systems Studies II*: 22-26.

COMPARACIÓN DE MODELAJE UTILIZANDO  
REDES NEURONALES DE REGRESIÓN GENERAL  
Y RELACIONES NO LINEALES DE REGRESIÓN  
PARA DETERMINAR LA RESISTENCIA DE  
TRABAJO DE MOTORES ELÉCTRICOS

S. DE LOS COBOS \* – C. GODDARD \* – I. JASSO † – B. PÉREZ ‡ – M. GUTIÉRREZ §

---

**Resumen**

En la práctica, para la verificación de la resistencia de operación en motores eléctricos de inducción las normas y estándares utilizados indican: *ajuste los datos e interpole*, por lo que en muchos casos esto representa problemas de interpretación en cuanto a que si se cumplen o no las características de funcionamiento deseadas. La práctica común es la de utilizar modelos no lineales de regresión (suponiendo las hipótesis teóricas).

En este trabajo se presentan diferentes técnicas utilizadas y aceptadas por las normas internacionales, así como su comparación con las las redes neuronales de regresión general. Las redes neuronales de regresión general, calculan un estimador de la función de regresión

---

\*Depto. de Ingeniería Eléctrica, U.A.M.-I, México, cobos@xanum.uam.mx.

†Jefe de Ingeniería de Producto, ABB División motores, México, jaime.jasso@mxabb.mail.abb.com.

‡Depto. de Matemáticas, U.A.M.-I, México.

§Depto. de Sistemas, U.A.M.-A, México.

poblacional. Estas redes han mostrado su utilidad para estimar valores de variables continuas tales como posiciones futuras o interpolación.

En la Sección 1 se dará una introducción a las técnicas de regresión así como a las redes neuronales de regresión general; en la Sección 2, se revisa la importancia del estudio realizado y se proporcionan las características generales de los motores muestreados, y las mediciones obtenidas; en la Sección 3 se muestran los resultados de los diferentes métodos propuestos; en la Sección 4 por último, se presentan conclusiones y sugerencias.

**Palabras clave:** redes neuronales de regresión general, modelos de regresión, resistencia de trabajo de motores eléctricos.

## 1 Introducción

En esta Sección se proporciona una introducción a los modelos de regresión así como a las redes neuronales de regresión general.

### 1.1 Modelos de regresión

Suponga que se tiene un proceso donde la variable respuesta (variable dependiente)  $y$  está relacionada con una variable aleatoria explicativa (variable independiente)  $X$ , denotado por  $y(X)$ . El análisis de regresión consiste en estimar el valor medio de  $y$  dado un valor particular  $X_0$  de  $X$ , *i.e.*, se desea encontrar:

$$E(y|X_0) = F(X_0), \quad (1)$$

donde  $E(y|X_0)$  es la esperanza condicional de  $y$  dado que  $X = X_0$ . En este caso  $F(X_0)$  denota una función de la variable explicativa y se le conoce como la función de regresión poblacional (FRP).

La función de regresión poblacional puede ser lineal o no lineal por ejemplo, para el caso univariado se tiene que:

1.  $F(X) = a + bX$  función de regresión poblacional lineal,
2.  $F(X) = ab^X$  función de regresión poblacional exponencial,
3.  $F(X) = aX^b$  función de regresión poblacional polinomial.

En el caso univariado si la FRP,  $F(X)$  es lineal se dice que se tiene un modelo de regresión lineal simple.



Suponga que  $X$  es una variable aleatoria univariada continua y que  $f(X, y)$  representa la función de densidad de probabilidad conjunta de  $X$  y  $y$ , entonces la esperanza condicional de  $y$  dado  $X$  está dada por:

$$E(y|X) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y f(X, y) dy}{\int_{-\infty}^{\infty} f(X, y) dy}. \quad (2)$$

Cuando  $f(X, y)$  es conocida, por lo general se estima de una muestra de observaciones de  $X$  y  $y$ . Para una estimación no paramétrica de  $f(X, y)$  se puede utilizar la clase de estimadores propuestos en [1], donde para el caso particular del kernel Gaussiano, los estimadores multivariados se pueden expresar como:

$$f(X, y) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} h^p} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \exp\left(-\frac{\|X - X^i\|^2}{2h^2}\right) \exp\left(-\frac{(y - y^i)^2}{2h^2}\right) \quad (3)$$

donde:

$i$  = número de patrón (muestra),

$m$  = número total de patrones de entrenamiento,

$X^i$  =  $i$ -ésimo patrón de entrenamiento,

$h$  = parámetro de suavizamiento o ancho de banda,

$p$  = dimensión del espacio de medida.

Observe que  $f(X, y)$  es simplemente la suma de distribuciones Gaussianas centradas en cada punto de la muestra de entrenamiento<sup>1</sup>.

## 2 Redes neuronales de regresión general

El paradigma de las redes neuronales trata en general, de imitar el proceso de solución de problemas que realiza el cerebro humano. Al igual que el ser humano aplica el conocimiento obtenido de experiencias pasadas para resolver problemas nuevos, las redes neuronales a través de ejemplos previamente resueltos construyen un sistema de “neuronas” (entrenadas en esos ejemplos) para realizar nuevas decisiones, clasificaciones y pronósticos.

En términos generales, existen dos tipos de redes neuronales: redes neuronales supervisadas y no supervisadas. Las redes neuronales supervisadas

---

<sup>1</sup>La suma no está limitada exclusivamente a Gaussianas, puede ser cualquier función de densidad suave.

son aquellas en las que se presentan patrones de entrada a la red y ésta compara las salidas resultantes con respecto de las deseadas y entonces ajusta los pesos de la red de manera tal que se reduzca su diferencia, en cambio, en las redes neuronales no supervisadas, los patrones de entrada se aplican y la red se auto organiza ajustando sus pesos mediante un algoritmo bien definido.

Specht [9] ha introducido las *redes neuronales de regresión generalizada* (GRNN, del inglés general regression neural networks) como alternativas al paradigma de redes neuronales supervisadas basadas en fundamentos matemáticos y con la ventaja de que no requieren entrenamiento sino la asignación de pesos en una sola pasada. Como indica Specht “La GRNN es la versión aproximadora de función, que es útil para estimar los valores de variables continuas tales como posición futura, valores futuros, e interpolación multivariada”.

La topología de la GRNN consta de una capa de entrada, dos capas intermedias, la de unidades patrón y la de unidades suma, y una capa de salida. Las unidades de entrada son sólo unidades de distribución, las cuales proporcionan todas las medidas (escaladas) de la variable  $X$ , a todas las neuronas de la segunda capa, unidades patrón. Cada unidad patrón realiza el producto  $(X - X^i)^t(X - X^i)$  lo que es seguido por la función de activación neuronal,  $\exp[-(X - X^i)^t(X - X^i)/2h^2]$ . De las unidades patrón se pasa a la tercer capa formada por dos unidades suma, una realiza la suma de las salidas de las unidades patrón *i.e.*,  $\sum_i \exp[-(X - X^i)^t(X - X^i)/2h^2]$ , y la otra realiza la suma ponderada  $\sum_i y^i \exp[-(X - X^i)^t(X - X^i)/2h^2]$ . La unidad de salida proporciona el estimador  $\hat{y}$  de  $y$  realizando el cociente de las unidades sumas, es decir:

$$\hat{y}(X) = \frac{\sum_i y^i \exp[-(X - X^i)^t(X - X^i)/2h^2]}{\sum_i \exp[-(X - X^i)^t(X - X^i)/2h^2]}, \quad (4)$$

el cual se obtiene al substituir el estimador dado en (3) en la ecuación (2). La forma del estimador puede variar, véase [9].

La capa de entrada tiene el mismo número de unidades que la dimensión del vector  $X$ . La segunda capa tiene el mismo número de unidades que el tamaño de la muestra, y la capa de salida tiene una unidad.

Dada su topología, la asignación de los pesos en la GRNN es en una sola pasada y no como en el caso de retropropagación que requiere un entrenamiento con los datos para encontrar los pesos. De hecho, técnicas que incorporan los datos de la misma manera que GRNN se llaman “métodos basados en memoria”. La razón es que se mantienen los datos en memoria

cuando se usa el modelo. En el caso de métodos como retropropagación, se llaman “métodos basados en modelos”, porque después de utilizar los datos para fijar los parámetros del modelo, generalmente no se utilizan en el funcionamiento del modelo. En el caso de GRNN, el hecho de que se tienen que mantener los datos en memoria puede ser desventajoso si se trata de una muestra grande. Se ha tratado de evitar este problema agrupando a los datos y trabajando con un número reducido de datos “prototipo” para implementar la GRNN.

El factor de suavizamiento  $h$  se selecciona de la siguiente manera: para cada valor de  $h$ , se elimina una muestra a la vez y se construye una red basada en todas las demás muestras. La red se utiliza entonces para estimar  $y$  de la muestra eliminada. Repitiendo este proceso para cada muestra y almacenando cada estimador, se mide el error cuadrado medio respecto del valor muestral  $y^i$  y el estimador. El valor de  $h$  que proporcione el error menor, es el que se usará en la red final. Cabe mencionar que existen otros métodos que incluyen búsqueda genética para encontrar el factor suavizante.

### 3 Importancia del problema

La laminación del núcleo de un motor de inducción representa en promedio entre el 40% y el 60% del costo del producto.

En [4] se define el método de resistencia como la determinación de la temperatura total del devanado mediante la comparación de la resistencia de devanado (winding en inglés), respecto de la resistencia a temperatura conocida. La temperatura del devanado se calcula mediante la ecuación:

$$\theta_2 = \theta_1 + \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1}\right)(\theta_1 + 235), \quad (5)$$

donde:

- $\theta_2$  = temperatura total del devanado en grados centígrados durante la prueba.
- $\theta_1$  = temperatura en grados centígrados del devanado al momento de la medida de la resistencia inicial.
- $R_2$  = resistencia del devanado durante la prueba.

- $R_1$  = resistencia del devanado a la temperatura  $\theta_1$  (en frío).

Dependiendo del valor de  $\theta_2$ , el motor puede requerir mayor o menor laminación en su núcleo.

Con la finalidad de ver el comportamiento de los diferentes métodos propuestos, se analizaron al azar 6 motores cuyo núcleo de fabricación era de 170 mm. de longitud, de 5.5 kw, de 2 polos, 380 volts, 50 hz, armazón de 132S y conexión Y, los resultados obtenidos por [8] se presentan en las Tablas 1 y 2.

El proceso de prueba se realizó de la siguiente manera: el motor se pone a trabajar a su capacidad nominal y una vez alcanzada la estabilidad térmica, se desconecta y se detiene la flecha físicamente. El tiempo transcurrido entre el frenado y la medición de la resistencia debe realizarse entre los 30 y 60 segundos.

medición	máquina 1			máquina 2			máquina 3		
	tiempo segs.	$R_2 - R_1$ ohms	temp. amb. $C^\circ$	tiempo segs.	$R_2 - R_1$ ohms	temp. amb. $C^\circ$	tiempo segs.	$R_2 - R_1$ ohms	temp. amb. $C^\circ$
1	60	2.200	21.0	60	2.180	19.0	60	2.190	21.0
2	90	2.160	21.0	90	2.155	19.0	90	2.160	21.0
3	120	2.150	21.0	120	2.150	19.0	120	2.140	21.0
4	150	2.140	21.0	150	2.130	19.0	150	2.120	21.0
5	180	2.120	21.0	180	2.110	19.0	180	2.100	21.0
6	210	2.100	21.0	210	2.100	19.0	210	2.090	21.0
7	240	2.090	21.0	240	2.090	19.0	240	2.075	21.0
8	270	2.075	21.0	270	2.075	19.0	270	2.060	21.0
9	300	2.070	21.0	300	2.060	19.0	300	2.060	21.0
10	330	2.060	21.0	330	2.055	19.0	330	2.050	21.0
11	360	2.050	21.0	360	2.050	19.0	330	2.140	21.0

Tabla 1. Valores muestrales.

medición	máquina 4			máquina 5			máquina 6		
	tiempo segs.	$R_2 - R_1$ ohms	temp. amb. $C^\circ$	tiempo segs.	$R_2 - R_1$ ohms	temp. amb. $C^\circ$	tiempo segs.	$R_2 - R_1$ ohms	temp. amb. $C^\circ$
1	60	2.300	18.0	60	2.180	20.0	60	2.145	22.0
2	90	2.100	18.0	90	2.090	20.0	90	2.125	22.0
3	120	2.075	18.0	120	2.075	20.0	120	2.100	22.0
4	150	2.050	18.0	150	2.050	20.0	150	2.056	22.0
5	180	2.040	18.0	180	2.040	20.0	180	2.050	22.0
6	210	2.030	18.0	210	2.030	20.0	210	2.045	22.0
7	240	2.025	18.0	240	2.010	20.0	240	2.045	22.0
8	270	2.010	18.0	270	2.000	20.0	270	2.030	22.0
9	300	2.000	18.0	300	2.000	20.0	300	2.025	22.0
10	330	1.998	18.0	330	1.955	20.0	330	2.020	22.0
11	360		18.0	360		20.0	330	2.010	22.0

Tabla 2. Valores muestrales.

### 4 Resultados de los diferentes métodos

Para encontrar los modelos de regresión lineal, exponencial y polinomial, propuestos en [2,3,4,5] así como los datos estadísticos correspondientes se utilizó el paquete LINEAL ©, y para los datos obtenidos por medio de redes neuronales de regresión general se utilizó el paquete NEUROSHELL 2 ©, obteniéndose los resultados de las Tablas 3 y 4 respectivamente.

motor	$F(x)$	$r^2$	valor F rechazo	suma cuadrados del error	residuo máximo	residuo mínimo	$F(0)$
1	$y = 2.20909 - 0.00004694x$	96.54	251.42	0.00078182	0.019090	0.001818	2.90909
1	$y = 2.545843x^{-0.038944}$	98.14	476.02	0.00009341	0.006047	0.000215	2.58543
1	$y = 2.2106370.999778x^e$	96.86	277.99	0.00015787	0.008472	0.000815	2.21063
2	$y = 2.19727 - 0.00043939x$	98.01	445.23	0.00038636	0.010909	0.001363	2.19727
2	$y = 2.540870x^{-0.031025}$	97.00	291.02	0.00013131	0.005801	0.000428	2.54087
2	$y = 2.1987150.999791x^e$	98.19	489.01	0.00007911	0.004978	0.000496	2.19871
3	$y = 2.23340 - 0.00059848x$	78.68	33.21	0.00960795	0.080454	0.006136	2.23340
3	$y = 2.738719x^{-0.050272}$	83.91	46.96	0.00157786	0.034089	0.001366	2.73872
3	$y = 2.2350170.999718x^e$	79.89	35.75	0.00197283	0.036439	0.003464	2.23502
4	$y = 2.21360 - 0.00077333x$	61.74	12.91	0.02751080	0.132800	0.003000	2.21360
4	$y = 2.919464x^{-0.067580}$	80.99	34.09	0.00296557	0.038207	0.002003	2.91946
4	$y = 2.2134150.999635x^e$	63.57	13.96	0.00568384	0.060302	0.001245	2.21342
5	$y = 2.13239 - 0.00050202x$	96.34	210.93	0.00070970	0.018212	0.003151	2.13239
5	$y = 2.487703x^{-0.039085}$	89.60	68.96	0.00049039	0.016871	0.000603	2.48770
5	$y = 2.1344330.999752x^e$	96.10	197.53	0.00017582	0.009079	0.0007600	2.13443
6	$y = 2.14681 - 0.00041727x$	86.91	59.75	0.00259610	0.028222	0.001664	2.14681
6	$y = 2.495365x^{-0.036858}$	96.27	232.56	0.00017128	0.008987	0.001368	2.49536
6	$y = 2.1477910.999791x^e$	87.37	62.29	0.00580290	0.013422	0.000657	2.14779

Tabla 3. Resultados utilizando LINEAL ©.

motor	$F(0)$	factor de suavizamiento	$r^2$	cuadrado medio del error	residuo máximo	residuo mínimo	Datos de entrenamiento
1	2.0743232	0.00703125	99.910	0.000	0.004	0.000	9
2	2.0550015	0.00703125	99.991	0.000	0.004	0.000	9
3	2.1600001	0.00703125	78.870	0.004	0.220	0.000	9
4	2.0750001	0.00703125	100.00	0.000	0.000	0.000	8
5	2.0999999	0.23957500	90.89	0.003	0.051	0.003	9
6	2.1450000	0.09140625	98.52	0.000	0.013	0.000	9

Tabla 4. Resultados utilizando NEUROSHELL 2 ©.

Cabe mencionar que los residuos medios de los errores máximos y mínimos están en valor absoluto.

Los datos de entrenamiento por Neuroshell 2 © fueron escogidos al azar por el propio programa y con iteraciones de tipo no adaptativo.

## 5 Conclusiones

Se puede observar que en todos los casos, los valores de  $F(0)$  calculado por las GRNN fueron menores que en los casos considerados por los diferentes modelos de regresión propuestos en las normas internacionales, por lo que en general representa un ahorro significativo en los costos si se utiliza GRNN como método de ajuste, ya que la diferencia entre el valor de  $F(0)$  obtenido por GRNN y el valor de  $F(0)$  del mejor ajuste<sup>2</sup> varió entre el 1.54 % y el 40.69 % dando en promedio una mejora del 16.48 %.

Es notable observar que para los casos de los motores 1,2,4 y 6 los coeficientes de determinación  $r^2$  reportados por GRNN son mejores que para los  $r^2$  de *todos* los modelos diferentes de regresión, en especial para el caso del motor 4.

### Agradecimientos

Deseamos agradecer a los árbitros anónimos que con sus valiosas sugerencias permitieron una mejora substancial del presente trabajo.

## Referencias

- [1] Cacoullos T. (1966) *Estimation of a Multivariate Density*, Annals of Institute of Statistical Math. (Tokio), 18-2, pp. 179–189.
- [2] C390-93: Energy Efficiency Test Methods Procedure for Tree-Phase Induction Motors, Norma CSAC390-93, Canadá.
- [3] Diario Oficial de México del 7 de febrero de 1997, NOM-016-ENER-1997: Eficiencia Energética de Motores de Corriente Alterna, Trifásicos de Inducción. Tipo Jaula de Ardilla, de uso general en potencia Nominal de 0.746 a 149.2 Kw - Límites, Método de prueba y Marcado.
- [4] IEEE, Std. 112-1991, IEEE Standard Test Procedure for Polyphase Induction Motors and Generators.
- [5] IEC **34-1**, 1994.
- [6] Lineal: Paquete de estadísticas lineales ©, Pérez S.B. R., de los Cobos S. S. y Gutierrez A. M. A., Universidad Autónoma Metropolitana, México
- [7] Neuroshell 2 ©, release 3.0, Ward System Group, Inc.

---

<sup>2</sup>Con  $r^2$  mayor.

- [8] Resultados de pruebas de laboratorio de ABB, S.A. de C.V., México.
- [9] Specht D.F. (1996) *Probabilistic Neural Networks and General Regression Neural Networks*, cap. 3, (Chen C. H., Ed.), *Fuzzy Logic and Neural Network Handbook*,

OPTIMIZACIÓN PARAMÉTRICA  
(SINGULARIDADES, CONTINUACIÓN DE CAMINOS  
Y SALTOS) Y ALGUNAS APLICACIONES

JÜRGEN GUDDAT \*

---

**Resumen**

Se introduce la clase de Jongen, Jonker, Twilt (cinco tipos, el punto crítico no degenerado y cuatro tipos de singularidades) para un problema general de optimización uno-paramétrico no lineal, para el principio de métodos de continuación de caminos para encontrar una descripción numérica de una componente en el conjunto de puntos críticos generalizados, y para posibles saltos hacia otras componentes conexas.

La parte que trata de las aplicaciones contiene nuevos resultados para problemas especiales de optimización paramétrica (incrustaciones) en optimización no lineal (p. ej. incrustación estándar, con penalidad y multiplicador de Lagrange), problemas de optimización vectorial no lineal (p. ej. incrustaciones motivadas por puntos eficientes –Pareto optimales–, pero también estrategias completamente nuevas y más eficientes) y problemas complementarios (una incrustación estándar modificada). Las clases que podemos resolver se extienden (para algunas singularidades, pero no todas, hemos tenido éxito).

---

\*Humboldt Universität zu Berlin, Berlin, Alemania



## UNA VERSIÓN PROFESOR-GRUPO-AULA DEL PROBLEMA DE HORARIOS\*

RAMIRO JOSÉ CÁCERES ESPINOZA †

---

### Resumen

Se presenta un problema de horarios que incluye, además de la asignación de espacios de tiempo (turnos) a actividades docentes, la asignación a éstas de aulas con capacidades que pueden ser distintas y que suponemos disponibles en todos los turnos.

Probando que una sencilla condición garantiza que las actividades en cada turno son acomodables en las aulas disponibles, se concluye que la asignación de las actividades usando la cantidad mínima de turnos puede hacerse en tiempo polinomial.

---

\*El artículo completo de este trabajo aparecerá publicado en la *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, Volumen 5, Número 1, de 1998.

†Departamento de Estadística y Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua-León, León, Nicaragua.

## ASIGNACIONES DE CURSOS EN AULAS

ALEX MURILLO\* - ALCADIO VERGARA BALOY† - RAMÓN SÁENZ †

### Resumen

En este artículo se presenta una propuesta que soluciona la problemática de las asignaciones de cursos en aulas. Dicha problemática será analizada en un ambiente universitario, donde el éxito de impartir una mayor cantidad de cursos en las diferentes Escuelas, dependerá del buen uso dado a las aulas. Esta propuesta expondrá procesos automáticos, que simularán a un experto en la asignación de cursos en aulas en una institución educativa.

**Palabras clave:** aulas, cursos, solicitudes, horarios, asignación, proceso.

### 1 Introducción

Debido al inevitable aumento de la población estudiantil y a la inadecuada utilización de las instalaciones físicas, las Universidades y demás Centros Educativos se ven obligados a destinar una gran cantidad de recursos (personal, tiempo, dinero) para satisfacer la demanda por aulas que se presenta en las Unidades Académicas.

La constante reestructuración que sufren las carreras hace que surjan una gran cantidad y variedad de actividades, esto conlleva a su vez requerimientos de la capacidad de las aulas en diferentes horarios. Generalmente, los cursos se acomodan de acuerdo a la experiencia que posean las personas encargadas de la asignación de cursos en aulas, sin asegurar, que se le esté sacando el mayor provecho a las instalaciones de una Universidad.

Además, los diversos períodos lectivos que manejan las diversas Facultades en una Universidad (trimestrales, cuatrimestre, semestrales, cursos de verano, etc.) ayudan a que el problema sea mucho más complejo ya que dentro de una misma aula pueden existir cursos que pertenezcan a diversos períodos lectivos, por lo cual, se torna bastante difícil controlar manualmente todas las actividades que ocurren a diario en las aulas a lo largo de un año lectivo y es posible que el encargado de las asignaciones se le olvide actualizar

\*CIMPA-PIMAD, Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica y Escuela de Matemática, Universidad Nacional, Heredia, Costa Rica

†Escuela de Informática, Universidad Nacional, Heredia, Costa Rica

los espacios vacíos que quedan cuando un período lectivo finalice, por cierre de grupos por traslado de un curso, entre otros cambios.

Cualquier algoritmo que se utilice para dar una solución eficiente al problema, deberá evaluar todas las posibilidades de asignación que se presente para dar el mayor provecho a las aulas, será necesario respetar las asignaciones de cursos ya existentes de acuerdo a las solicitudes requeridas por el curso. A continuación se presenta el modelo que se utilizó en el algoritmo que se propone para representar el horario de un curso, en la asignación de cursos en aulas.

## 2 Conversiones numéricas de días y horas para horarios

El modelo numérico que se presenta será para facilitar el procesamiento de los horarios (días y horas) que se utilizan en una asignación normal de cursos o actividad académica dentro de una institución educativa [1]. Estos horarios serán dados de lunes a sábado de 7:00 a.m. hasta las 22:00 horas [2]. Dichas conversiones numéricas de horas y días se realizará de la siguiente manera:

Primero se deberá tomar los días para expresarlos en términos numéricos dentro de parámetros de rangos establecidos: Lunes...Sábado, expresado en rangos numéricos de 1...6. Es decir, Lunes será igual al número 1, Martes = 2, Miércoles = 3, Jueves = 4, Viernes = 5 y Sábado = 6. Posteriormente las horas se unirán a los rangos anteriores.

Por ejemplo: Para la asignación del día Lunes de 8:00 a 12:00 a.m. El día Lunes se modelará con el número 1 y la hora inicial 8:00 a.m. equivaldrá a un 8, y a su vez 12:00 a.m. será sinónimo del número 12. Entonces, numéricamente esto quedaría representado por:

$$\text{Día} = 1$$

$$\text{Hora_Inicial} = 8$$

$$\text{Hora_Final} = 12.$$

Una vez que se tienen los días y las horas en expresiones numéricas se procede a unirlos en un sólo término numérico, el día se multiplica por 10000, con la intención de obtener una expresión numérica de 5 dígitos. Posteriormente se multiplica la hora por 100 para obtener una expresión numérica de 3 dígitos, esto es:

$$\text{Día} = (1 * 10000) = 10000$$

$$\text{Hora_Inicial} = (8 * 100) = 800$$

$$\text{Hora_Final} = (12 * 100) = 1200.$$

Una vez que se calcula de manera individual el día, la hora de inicio y la hora de finalización, se recalculará solamente la hora de inicio y finalización del curso utilizando el cálculo del día, que en este caso sería: Hora\_Inicial y Hora\_Final, porque en estas dos últimas variables se albergará toda la información pertinente al día y la hora que se esté trabajando, con esto no importará que sea cualquier día de la semana (Lunes....Sábado) y a cualquier hora del día (7:00....22:00).

Ahora se procede unir el horario completo a manejar, de la siguiente forma:

$$\text{Hora_Inicial} = 10000 + 800 = 10800 \text{ (Representa el Lunes a las 8:00 a.m.)}$$

$$\text{Hora_Final} = 10000 + 1200 = 11200 \text{ (Representa el Lunes a las 12:00m.d.)}$$

Que en expresión computacional y/o algorítmica sería:

$$\text{Día} = (\text{día} * 10000)$$

$$\text{Hora.Inicial} = (\text{Hora.Inicial} * 100) + \text{Día}$$

$$\text{Hora.Final} = (\text{Hora.Final} * 100) + \text{Día}.$$

Además, si se desea incluir los minutos a la expresión numérica total, se deberá multiplicar los minutos por 10 para después añadirlos al rango de Hora.Inicial y Hora.Final de la expresión. Adicionalmente podemos obtener la representación numérica de todos los días de la semana al aplicar dicha fórmula a cada día con respecto a cada hora que le pertenece, como se muestra en la figura 1.

**Figura 1**

**REPRESENTACIÓN NUMÉRICA DE LOS HORARIOS:**

HORAS	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
7:00	10700	20700	30700	40700	50700	60700
8:00	10800	20800	30800	40800	50800	60800
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
21:00	12100	22100	32100	42100	52100	62100
22:00	12200	22200	32200	42200	52200	62200

### 3 Agregar o Asignar solicitudes de cursos

#### i) Información general del proceso:

Al obtener los datos relacionados al curso, se podrá crear una solicitud de cursos para que posteriormente pueda ser ingresado o asignado por diversas formas, entre las cuales se tienen:

- A) Aulas de laboratorio: Se podrá hacer uso de los criterios de asignación de laboratorios.
- B) Aulas automática: Se podrá utilizar solamente para las asignaciones de grupos teóricos.
- C) Ingreso manual en aulas: Se podrá ingresar manualmente solicitudes desde las aulas indicadas. En los casos que se utilice procesos de aulas automáticas se le asignará alguna aula para dicha solicitud, la cual se llevará a cabo bajo los criterios idóneos.

Criterios para definir una asignación de cursos como óptima (Universidad Nacional)

[5]:

1. Que todos los cursos sean asignados dentro de las aulas de su propia Escuela y Facultad.
2. En el caso que no sea posible asignarlo en su propia Escuela, asignarlo dentro de su Facultad.

3. Asignar los cursos solicitados de mayor a menor prioridad: curso de carrera, serv etc.
4. Tratar de asignar diferentes horarios de un mismo curso y grupo en una misma a
5. Detectar los choques de los horarios de cursos solicitados con los ya existentes.
6. Con el punto anterior, se evitara errores e inconsistencias en la bases de datos.
7. Tratar de realizar estos procesos dinámicos al menor tiempo posible.

## ii) Descripción detallada del proceso:

Un factor muy importante a considerar antes de agregar alguna solicitud en cualquier de sus modalidades, es determinar previamente los horarios libres existentes, ya que los ingresos a base de datos se deberá dar solamente si éste no choca con las solicitudes existentes en aulas. En la figura 2 se presentará la forma en que se determinaran los horarios libres dentro de una aula específica.

Figura 2: Horas libres y ocupadas del aula (AULA: 0106-50)

Horas	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
7:00	0	0	0	0	0	0
8:00	0	0	1	0	0	0
9:00	1	0	1	0	0	0
10:00	1	0	1	0	0	0
11:00	1	0	0	0	0	0
12:00	0	0	0	0	0	0
13:00	0	0	0	0	0	0
14:00	0	0	0	0	0	0
15:00	0	0	1	0	0	0
16:00	0	0	1	0	0	0
17:00	0	0	1	0	1	0
18:00	0	0	1	0	1	0
19:00	0	0	0	0	0	0
20:00	0	0	0	0	0	0
21:00	0	0	0	0	0	0
22:00	0	0	0	0	0	0

**Horarios Existentes:**

Inicio - Fin

10900 - 11200

30800 - 31100

**Nuevas Solicitudes:**

Inicio - Fin

31500 - 31900

51700 - 51900

Nota: El número 0 indica una hora libre y el número 1 indica una hora ocupada de curso.

Como se observa en el ejemplo de la figura 2, existen solicitudes procesadas anteriormente en la base de datos, que son: el día Lunes de 9:00 a 12:00 m.d. y el día Miércoles de 8:00 a 11:00 a.m., que en representación numérica serían los rangos de 10900 - 11200 y 30800 - 31100 respectivamente.

Los procesos involucrados en el modulo de agregar, deberán respetar a toda costa las solicitudes que se albergan en un aula, que para nuestro caso sería el aula 0106-50. Es importante señalar, que no se deben realizar ingresos que choquen con otras solicitudes ya existentes, porque de esta manera se crearía inconsistencia en la base de datos y desfases en los procesos de asignación de horarios. Por lo tanto, es necesario determinar los horarios libres que contenga una aula antes de ingresar cualquier solicitud de cursos. En este caso, la figura 3.3 muestra los rangos de horas libres del aula 0106-50.

Una vez que se tiene indicado las estadísticas de los horarios libres y ocupados, señalados en la figura 3, entonces se ingresa cualquier solicitud dentro de los parámetros o rangos de horarios libres, tomando en cuenta las solicitudes ya existentes como horarios ocupados. En nuestro ejemplo vemos que las solicitudes pueden ser cumplidas, ya que lo solicitado (31500 - 31900 y 51700 - 51900) entra en los rangos de horarios libres. Cuando ya se determinan las solicitudes como posibles, éstas pueden ser ingresadas a la base de datos junto con todos sus atributos de relación lógica y física.

**Figura 3: Rangos de Horarios libres durante la semana**

<b>HORARIOS LIBRES:</b>		<b>HORARIOS OCUPADOS O EXISTENTES:</b>	
DÍAS DE LA SEMANA	RANGO DE HORAS INICIO - FIN	DÍAS DE LA SEMANA	RANGO DE HORAS INICIO - FIN
Lunes	10700 - 10900	Lunes	10900 - 11200
Lunes	11200 - 12200	Miércoles	30800 - 31100
Martes	20700 - 22200		
Miércoles	30700 - 30800		
Miércoles	31100 - 32200		
Jueves	40700 - 42200		
Viernes	50700 - 52200		
Sábado	60700 - 62200		

<b>HORARIOS DE NUEVAS SOLICITUDES:</b>	
DÍAS DE LA SEMANA	RANGO DE HORAS INICIO - FIN
Miércoles	31500 - 31900
Viernes	51700 - 51900

Al expresar lo anterior de la figura 3 en teoría de conjuntos, tendríamos lo siguiente:

Rango\_libres = {10700, 10800, 11200...12200, 20700...22200, 30700, 31100, 31200...32200, 40700...42200, 50700...52200, 60700...62200}

Horario\_solicitud1 = {31500...31900}

Horario\_solicitud2 = {51700...51900}

Posible\_solicitud1 = Horario\_solicitud1  $\subset$  Rango\_libres

Posible\_solicitud2 = Horario\_solicitud2  $\subset$  Rango\_libres.

Entonces, al mencionar los elementos de conjuntos, podríamos decir, que:

31500 $\in$ Rango_libres	51700 $\in$ Rango_libres
31600 $\in$ Rango_libres	51800 $\in$ Rango_libres
30800 $\notin$ Rango_libres	10900 $\notin$ Rango_libres.

## 4 Asignación por aulas solicitadas

### i) Información general del proceso

Este proceso se encargará de ubicar las solicitudes de cursos en el aula solicitada como única opción de asignación. Para llevar a cabo dicho proceso, será necesario indicar el grado prioridad del curso (mayor a menor), horario del curso (días y horas), etc.

La prioridad relacionada en cursos, será un factor determinante en el proceso de asignación por aulas solicitadas, en la cual se procesará de manera prioritaria dichos cursos que alcancen un alto grado de prioridad en comparación al resto de solicitudes que compitan por una misma aula. Esto quiere decir, que se ordenarán las prioridades (mayor a menor grado) antes de realizar cualquier asignación en aulas.

Los criterios que se toman en cuenta para determinar las prioridades en cursos son diversos, por ejemplo: debe ser más prioritario asignar un curso propio de carrera que a un curso de servicio, donde dicho curso de servicio podría quitarle el campo a cursos de carrera.

### ii) Descripción detallada del proceso

En este proceso, las solicitudes son tomadas desde una base de datos sin procesar, para que posteriormente sean procesadas de acuerdo a los criterios idóneos de asignación. La solicitud será cumplida, lo máximo posible en el aula solicitada. Cuando dicha solicitud no puedan ser realizada, ingresarán a una base de datos distinta a las de solicitudes posibles.

#### *Descripción detallada de asignaciones de cursos iguales hacia una sola aula*

Uno de los problemas que se da en la asignación de cursos, es que un determinado curso es impartido dos o tres veces por semana, y asignado en aulas diferentes, cosa que es incomoda tanto para el profesor que imparte el curso como para los estudiantes que asisten a él [3]. Lo idóneo, sería que todas las lecciones quedarán asignadas en la misma aula, "si es posible".

Como se observa, este problema tiene que tomar en cuenta una gran cantidad de factores, que además de los que se han mencionado, se tiene que tomar en cuenta una solución que permita agrupar una cantidad  $n$  de cursos iguales, dentro de una cantidad  $m$  de solicitudes de cursos desiguales, quién verificaría a su vez una cantidad  $x$  de posibilidades constantes de asignación dentro de las aulas con cursos ya existentes en base de datos.

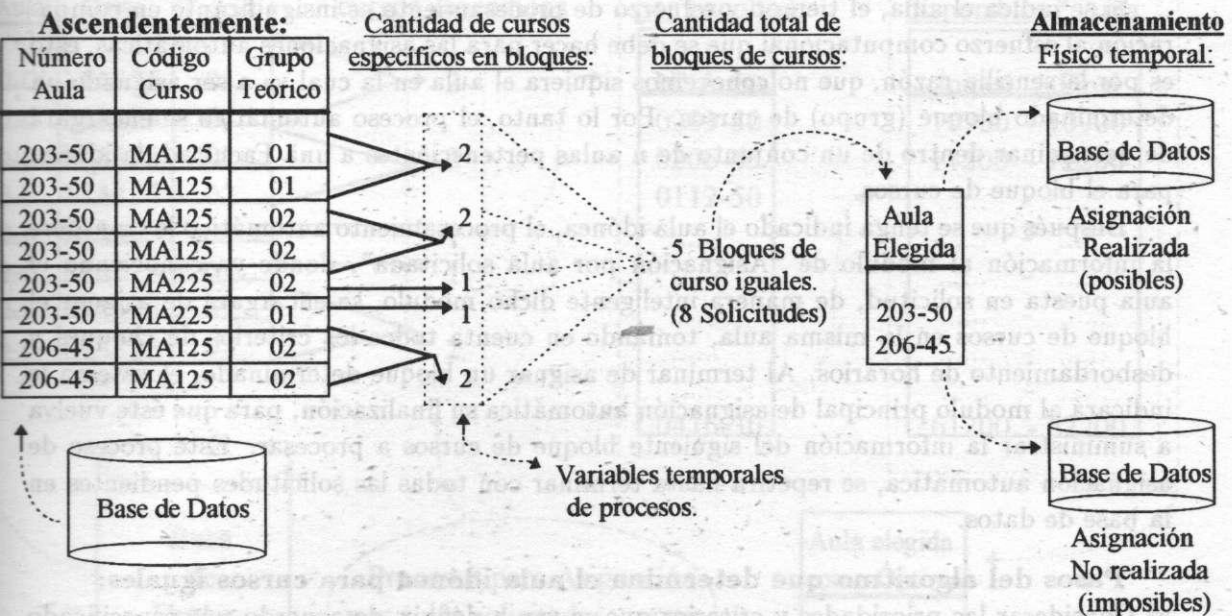
Estos tres factores que se mencionaron (cantidades  $n, m, x$ ), se interrelacionan entre sí, cada uno emite información reciente para que el otro la procese y tome decisiones de acuerdo a la situación más óptima que vaya encontrando en ese preciso momento, esto

estaría relacionado a los horarios disponibles en aulas con respecto a la cantidad  $n$  de cursos iguales [4]. Este proceso se repetirá hasta que se agoten todas las posibilidades, que involucren tanto las nuevas solicitudes entrantes como las existentes (ver figura 4). A continuación se indicaran los pasos para poder ejecutar en forma eficiente el algoritmo de asignación de cursos en aulas.

**Pasos para llevar a cabo el algoritmo de las asignaciones de cursos iguales en aulas:**

- 1) Ordenar ascendentemente las solicitudes nuevas contenidas en base de datos, dicho ordenamiento ascendente se deberá hacer de acuerdo a dos tipo de procesamiento, que son:
  - 1.1) Por Aulas Solicitadas: aula, curso, prioridad, grupo\_teo, hora\_ini.
  - 1.2) Por Cualquier tipo de procesamiento Automático: prioridad, curso, grupo\_teo, hora\_ini.
- 2) Determinar la cantidad de registros que posee la base de datos con las solicitudes nuevas.
- 3) Determinar la cantidad de bloques o grupos de cursos iguales y unitarios que existen.
- 4) Iniciar el indicador en 1, que registrará el movimiento inicial de registros en base de datos.
- 5) Cargar de manera inicial, los datos contenidos en el primer registro de la base de datos.
- 6) Actualizar el puntero o indicador de movimientos de registros en base de datos.
- 7) Determinar un bloque (grupo) específico de cursos y grupos iguales o unitarios.
- 8) Asignar en una misma aula el bloque de cursos y grupos, determinados en el paso 6.
- 9) Almacenar en base de datos las asignaciones procesadas, ya sea que fueron posibles o no.
- 10) Repetir  $n$  veces este proceso desde el paso 6.
- 11) Borrar las solicitudes nuevas almacenadas en base de datos, ya que fueron procesadas.

**Figura 4: Nuevo método planteado para la asignación de cursos Solicitudes Ordenadas**





Como se observa en la figura 4, el procesamiento para la asignación de cursos se realizará en pequeños bloques de cursos, lo cual indicará, que el uso de memoria será reducida al uso de simples variables temporales. Cosa que no sucedería con la utilización de otros algoritmos para resolver este problema, ya que dicha naturaleza del problema obliga a tomar en cuenta todas las asignaciones que están en ejecución y las que ya han sido procesadas anteriormente, tomadas al mismo tiempo. Por lo tanto, se puede decir que la cantidad de solicitudes a procesar podrá ser ilimitada, con la única limitación del espacio disponible en disco duro dedicada a almacenar la gran cantidad de información procesada.

## 5 Asignación automática de aulas

### i) Información general de los procesos

Dichas asignaciones automáticas se encargarán de ubicar en aulas, las solicitudes almacenadas en la base de datos, que siempre estarán en lista de espera para ser procesadas. Para que dicho proceso se lleve a cabo, se deberá indicar previamente la Facultad y la Escuela donde se va a realizar la asignación. Para que los procesos se encarguen posteriormente de buscar el aula en la cual se pueda asignar las solicitudes del curso.

### ii) Descripción de los procesos

Siguiendo con el ejemplo de la figura 4, se observa que las ocho solicitudes piden ser ubicadas en aulas específicas, por lo tanto dichas asignaciones se realizan sobre el aula solicitada, ya sea que se pueda asignar o no, la solicitud hacia el aula solicitada siempre deberá ser respetada.

Si se indica el aula, el tiempo y esfuerzo de procesamiento es insignificante en comparación al esfuerzo computacional que se debe hacer para las asignaciones automáticas, esto es por la sencilla razón, que no conocemos siquiera el aula en la cual va a ser asignado un determinado bloque (grupo) de cursos. Por lo tanto, el proceso automático se encargará de determinar dentro de un conjunto de  $n$  aulas pertenecientes a una Facultad, la idónea para el bloque de cursos.

Después que se tenga indicado el aula idónea, el procesamiento automático le transfiere la información al módulo de "Asignación por aula solicitada", donde ya conociendo el aula puesta en solicitud, de manera inteligente dicho módulo, se encargará de asignar el bloque de cursos en la misma aula, tomando en cuenta todos los criterios de choques y desbordamiento de horarios. Al terminar de asignar un bloque determinado, el sistema le indicará al módulo principal de asignación automática su finalización, para que éste vuelva a suministrar la información del siguiente bloque de cursos a procesar. Este proceso de asignación automática, se repetirá hasta terminar con todas las solicitudes pendientes en la base de datos.

### Pasos del algoritmo que determina el aula idónea para cursos iguales:

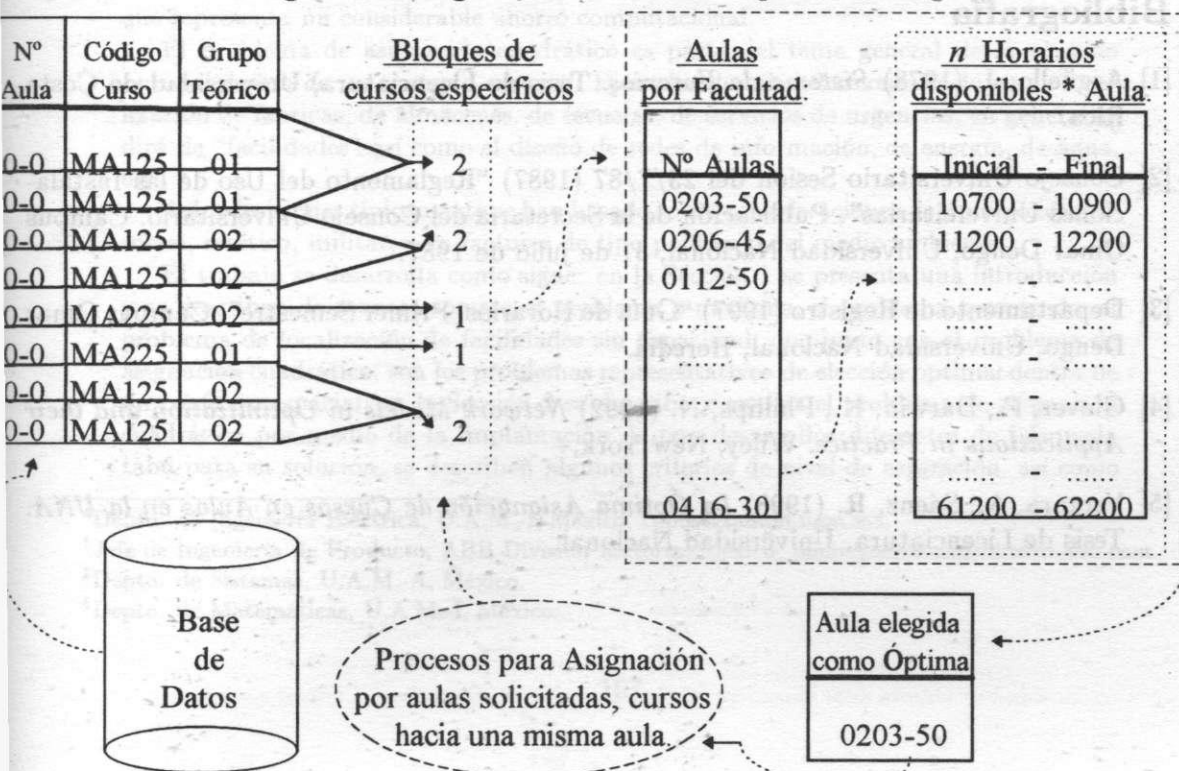
a) Considerar las prioridades y criterios que se van a definir, de acuerdo a lo especificado

en la Asignación por aulas solicitadas.

- b) Determinar la cantidad  $n$  de aulas que pueda tener una Facultad, incluyendo sus Escuelas.
- c) Tomar de la Facultad solicitada todas las aulas con cupos, cantidad calculada en el punto (b).
- d) Si existe solicitud realizada por Escuela específica de Facultad, se deberá ordenar la lista de aulas, poniendo de primero en lista todas las aulas que pertenecen a la Escuela solicitada.
- e) Determinar la posibilidad de aceptar el cupo de curso-con respecto al cupo del aula.
- f) Determinar los espacios libres en aulas, de acuerdo a la lista dada en el punto (d).
- g) Determinar la cantidad de espacios disponibles en aulas con relación al bloque de solicitudes.
- h) Si la cantidad de espacios disponibles en aula satisface a la cantidad de bloque de cursos iguales, deberá salir del procesamiento, sino, deberá continuar hasta encontrar el óptimo.
- i) Repetir este proceso desde el punto (e) hasta agotar la  $n$  cantidad de aulas en una Facultad.
- j) Una vez determinada el aula idónea, se procederá a realizar los procedimientos para asignar los cursos parecidos en una sola aula, tema de la sección de Asignación por aula solicitada.
- k) Repetir todos los procesos desde el punto inicial (a) hasta asignar todas las solicitudes.

La figura 5, mostrará la asignación automática de acuerdo a lo mostrado en la figura 4.

Figura 5: Asignación Automática por Facultad



## 6 Conclusiones

La problemática de Asignación de Cursos en Aulas, no se resume a una simple actividad de quitar y poner cursos en determinados horarios por aulas, sino que es una actividad conceptualizada con muchísimos más elementos que se deben tomar en cuenta a la hora de realizar asignaciones en aulas, dichas actividades van desde una simple ubicación manual de cursos en aulas hasta la ubicación automática de curso en aulas de manera inteligente. Por lo tanto, los criterios idóneos de asignación son muy importantes, ya que estos nos permiten obtener una asignación: "lo más cercana a la óptima".

El uso de los recursos computacionales permitió llevar a cabo los planteamientos conceptuales a la solución de la problemática de asignación de cursos. Debido al papel preponderante que desempeña las bases de datos en la obtención de la solución a dicho problema se escogió el lenguaje "Visual Fox Pro, Versión 3.0 Profesional" para desarrollar la aplicación. El programa fue probado con datos reales de asignación de cursos, pertenecientes a la Universidad Nacional de Heredia, Costa Rica. Dichas pruebas fueron llevadas a cabo con una cantidad de más de 1100 solicitudes con choques con la opción de "Procesamiento Automáticos por Facultad".

Además, dicho proyecto cuenta con todo el soporte de los procesamientos de asignación de cursos manuales. Se logró implementar un proceso mucho más exhaustivo de Asignación de cursos por cercanías de Facultad, dicho proceso recorre Facultades existentes en una Universidad, lo cual realiza recorridos de aula por aula, horario por horario y posibilidad por posibilidad alrededor de todas las instalaciones de la Universidad tratada hasta encontrar la asignación óptima al curso imposible de asignar.

## Bibliografía

- [1] Argüello, J. (1978) *Sistema de Horarios*. Tesis de Licenciatura, Universidad de Costa Rica.
- [2] Consejo Universitario Sesión del 23/7/87 (1987) "Reglamento del Uso de las Instalaciones Universitarias". Publicación de la Secretaría del Consejo Universitario. Campus Omar Dengo, Universidad Nacional, 31 de julio de 1987.
- [3] Departamento de Registro (1997) "Guía de Horarios. Primer Semestre". Campus Omar Dengo, Universidad Nacional, Heredia.
- [4] Glover, F.; Darwin, K.; Phillips, N. (1992) *Network Models in Optimization and their Applications in Practice*. Wiley, New York.
- [5] Vergara, A.; Sáenz, R. (1998) *La Óptima Asignación de Cursos en Aulas en la UNA*. Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional.

## ESQUEMAS COMPARATIVOS DE LA BÚSQUEDA TABÚ PARA EL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN CUADRÁTICO

S. DE LOS COBOS \* – C. GODDARD\* † – M. GUTIÉRREZ ‡ – B. PÉREZ §

---

### Resumen

En el campo de la optimización combinatoria surgen una gran variedad de problemas prácticos y teóricos de manera extensa e interesante, algunos de ellos fáciles de resolver, pero otros con un alto grado de complejidad.

En este trabajo se presenta la bondad de la técnica de la búsqueda tabú para el problema de asignación cuadrático, así como los lineamientos a seguir para la implementación en computadora. El trabajo presenta el desarrollo de tres algoritmos de la técnica de la búsqueda tabú, uno de los cuales, a diferencia de los reportados en la literatura no utiliza ninguna rutina de construcción ni de mejoramiento inicial antes de aplicar la búsqueda tabú, además también a diferencia de los resultados reportados en la literatura nuestro método encuentra los valores óptimos o mejores valores reportados en la literatura sin recurrir a la fase de diversificación regional de búsqueda, lo que representa un considerable ahorro computacional.

---

\*Depto. de Ingeniería Eléctrica, U.A.M.-I, México, cobos@xanum.uam.mx.

†Jefe de Ingeniería de Producto, ABB División motores, México, jaime.jasso@mxabb.mail.abb.com.

‡Depto. de Sistemas, U.A.M.-A, México.

§Depto. de Matemáticas, U.A.M.-I, México.

El problema de asignación cuadrático es parte del tema general de la *elección optimal dentro de un contexto espacial*. Ejemplos de tales elecciones incluyen la localización de fabricas, de almacenes, de escuelas, de servicios de urgencias, en general se dirá de “facilidades” así como el diseño de redes de información, de energía, de agua, etc.

Tales decisiones típicamente se han basado sobre consideraciones de tipo económico, social, estético, militar, o en factores de tipo político o del medio ambiente.

El trabajo se desarrolla como sigue: en la Sección 1 se presenta una introducción y se describen de manera somera el problema p-mediana, el problema p-centrado, el problema de localización de facilidades sin capacidad, que junto con el problema de asignación cuadrático, son los problemas representativos de elección optimal dentro de un contexto espacial; en la Sección 2 se describe y analiza el problema de asignación cuadrático por medio de la implantación de tres desarrollos diferentes de búsqueda tabú para su solución, se describen algunos criterios de nivel de aspiración, así como algunos métodos del manejo de la lista tabú de tipo dinámico; en la Sección 3 se hace un análisis comparativo de los tres desarrollos propuestos y se presenta la experiencia computacional, por último en la Sección 4, se presentan algunas conclusiones.

**Palabras clave:** Búsqueda tabú, problema de asignación cuadrático.

## 1 Introducción

La literatura respecto a los problemas de localización es muy amplia, y existen muchas formulaciones y clasificaciones como se puede ver en [2 y 3], para una revisión amplia de aplicaciones y formulaciones del problema de localización se puede ver [1].

### 1.1 Problemas de localización de facilidades sin capacidad

Sea  $J = \{1, \dots, n\}$  un conjunto finito de  $n$  posibles lugares para el establecimiento de nuevas facilidades o para redimensionar las ya existentes. El problema de localización de facilidad sin capacidad (PLFSC) trata del abastecimiento de un bien desde un subconjunto de esas localidades potenciales para ser facilidades, a un conjunto  $I = \{1, \dots, m\}$  de  $m$  clientes con demandas preestablecidas del bien. Las facilidades se suponen de capacidad ilimitada de tal manera que cualquier facilidad puede satisfacer toda la demanda. Existen costos asociados con las facilidades y con las rutas de transportación de los sitios potenciales como facilidades hacia los clientes,

lo que se desea es, encontrar un plan de producción-transportación de costo mínimo que satisfaga toda la demanda o equivalentemente que maximice la utilidad.

Sea  $f_j$  el costo fijo por abrir la facilidad  $j$  y que existe una utilidad conocida  $c_{ij}$  que se tiene cuando se satisface al cliente  $i$  desde la localidad  $j$ . Típicamente,  $c_{ij}$  es una función de los costos de producción en la facilidad  $j$ , los costos de transportación desde la facilidad  $j$  al cliente  $i$ , la demanda del cliente  $i$  y el precio de venta para el cliente  $i$ . Por ejemplo,  $c_{ij} = d_i(p_i - q_j - t_{ij})$  donde  $d_i$  es la demanda,  $p_i$  el precio por unidad,  $q_j$  el costo de producción por unidad y  $t_{ij}$  el costo de transporte por unidad.

Para cualquier conjunto  $S$  de facilidades abiertas<sup>1</sup>, es óptimo servir al cliente  $i$  desde la facilidad  $j$  para el cual  $c_{ij}$  es máximo sobre  $j \in S$ . Entonces, dado  $S$  la utilidad es:

$$z(S) = \sum_{i \in I} \max_{j \in S} c_{ij} - \sum_{j \in S} f_j.$$

El problema por tanto es, encontrar un conjunto  $S$  que permita la máxima utilidad  $Z$ , i.e.,  $Z = \max_{S \subset J} z(S)$ . Esta formulación es como un problema combinatorio.

Ahora bien, una formulación como programa lineal entero, se obtiene al introducir las variables  $x_j = 1$ , si la facilidad  $j$  está abierta y cero de otra forma, y a la variable  $y_{ij} = 1$ , si la demanda del cliente  $i$  se satisface desde la facilidad  $j$  y cero de otra forma. Por lo que el programa lineal entero queda como:

$$Z = \max \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} - \sum_{j \in J} f_j x_j$$

sujeito a:

$$\sum_{j \in J} y_{ij} = 1 \quad \text{para toda } i \in I,$$

$$y_{ij} \leq x_j \quad \text{para toda } i \in I, j \in J,$$

$$y_{ij}, x_j \in \{0, 1\} \quad \text{para toda } i \in I, j \in J.$$

subsection Problema p-mediana

Considérese la red  $N = (V, A)$  consistente del conjunto de vértices  $V$  y un conjunto de arcos  $A$ . Con cada arco que va del vértice  $v_a$  al vértice  $v_b$  y denotado como  $[v_a, v_b]$  está asociado un número real positivo  $\alpha(v_a, v_b)$  llamado la *longitud* de ése

<sup>1</sup>Una facilidad es abierta si se considera que satisface cierta demanda del bien o servicio.

arco. Entonces, para un par de nodos en una red, inicialmente se está interesado en encontrar una de las trayectorias más cortas *i.e.*, una trayectoria de longitud mínima que conecte a esos dos nodos, la cual se denotará por  $P[v_a, v_b]$  con una longitud  $d(v_a, v_b)$ . La matriz simétrica asociada a las distancias entre los vértices se denotará por  $D$ .

Supóngase ahora que cada uno de los nodos de la red corresponde a un cliente y que el  $i$ -ésimo cliente tiene una demanda de  $w_i$  unidades de cierto bien por período de tiempo, la cual es independiente de la localización de la facilidad que lo satisfaga. Más aún, supóngase que cada nodo es un sitio de localización potencial para una facilidad la cual puede producir cualquier cantidad del bien deseado (por unidad de tiempo) y enviarlo a través de los caminos representados por los arcos. También supóngase que cada entrega del bien requiere un viaje sencillo entre una facilidad y un cliente, *i.e.*, no se consideran a los escenarios donde un viaje satisface varias demandas. A menos de que exista ambigüedad, usaremos “cliente  $f$ ” y “facilidad  $g$ ” como equivalente con “un cliente localizado en, o representado por el nodo  $v_f$ ” y “una facilidad puesta en la localidad  $v_g$ ”.

Las facilidades pueden estar *abiertas* o *cerradas*. La facilidad  $i$  se dice cerrada si ninguna facilidad es localizada en la localidad  $v_i$  y por tanto ningún cliente puede ser servido desde esa localidad potencial, de otra forma se dirá que la facilidad está abierta, y a menos de que se diga lo contrario, las facilidades abiertas son *sin capacidad* en el sentido de que pueden satisfacer a cualquier número de clientes.

El problema  $p$ -mediana (P-pM) se establece de la siguiente manera: dado un número  $p$  entero positivo ( $p \leq |V|$ ), se desea establecer  $p$  facilidades en las localidades potenciales tal que las demandas de todos los clientes sean satisfechas de manera que el costo total en el que se incurra sea mínimo.

Entonces lo que se desea es encontrar una solución optimal, la que se obtiene resolviendo:

$$\text{Minimizar}_{y,z} \sum_{k \in K} \sum_{j=1}^n c_{kj} y_{kj},$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \sum_{k \in K} y_{kj} &= 1 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n, \\ z_k - y_{kj} &\geq 0 \quad \forall k \in K, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{k \in K} z_k &= p, \end{aligned}$$

$$z_k \in \{0, 1\}, \quad y_{kj} \geq 0 \quad \forall k \in K, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

donde:

$K$  es el conjunto de localidades optimales en las que las nuevas facilidades se restringirán.

$c_{kj} = w_k d(v_k, v_j)$  es el costo total en el que se incurre si todas las  $w_k$  unidades demandadas por el cliente  $k$  son enviadas por la facilidad  $j$ .

$y_{kj}$  es la proporción de la demanda  $w_j$  de la facilidad  $j$  existente, asignada a una nueva facilidad localizada en  $k$ .

$z_k = 1$ , si la localidad  $k$  se elige para una nueva facilidad y cero de otra forma.

El primer conjunto de restricciones asegura que la demanda de cada facilidad existente es completamente distribuída. El segundo conjunto de restricciones asegura de que no existe distribución en la localidad  $k$  a menos de que una facilidad se encuentre localizada. La restricción final requiere de que exáctamente  $p$  facilidades sean localizadas.

## 1.2 Problema p-centrado

Sea  $X_p = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  el conjunto de  $p$  puntos y  $D(y, X_p) = \min_{x \in X_p} d(y, x)$ , donde  $d(x, y)$  es la distancia de alguna de las trayectorias más cortas entre  $x$  y  $y$ . Por tanto el problema p-centrado se formula como:

$$H(X_p) = \max_{y \in V} D(y, X_p),$$

donde  $V$  es el conjunto de las  $m$  posibles localidades para las facilidades.

El problema p-centrado (P-pC), difiere significativamente del P-pM en varios aspectos, principalmente con respecto al criterio usado para calcular la calidad de una solución factible. Mientras que el P-pM es un problema *minisum*, el P-pC tiene un objetivo *minimax*: Abiertas  $p$  facilidades y asignando a cada cliente a exáctamente una de ellas tal que la *distancia máxima* de cualquier facilidad abierta a cualquiera de los clientes asignados a ella sea mínima.

Tales funciones objetivo minimax ocurren frecuentemente en formulaciones de problemas de localización para servicios de emergencia tales como estaciones de policía, de bomberos o de servicios de ambulancia.

## 2 Problema de asignación cuadrático

En su forma más simple, el problema de asignación cuadrático (QAP, del inglés quadratic assignment problem) puede describirse como sigue. Encon-



trar la asignación óptima de  $n$  objetos a  $n$  localidades para minimizar el producto acumulado de flujo entre cualesquiera dos objetos por las distancias entre cualesquiera dos localidades. De manera más precisa, si  $f_{ip}$  es el flujo entre los objetos  $i$  y  $p$ , y  $d_{jq}$  es la distancia entre las localidades  $j$  y  $q$ , el problema puede escribirse como:

$$\text{Minimizar } \sum_i \sum_p \sum_j \sum_q f_{ip} d_{jq} x_{ij} x_{pq},$$

sujeto a:

$$\sum_j x_{ij} = 1 \forall i, \quad \sum_i x_{ij} = 1 \forall j, \quad x_{ij} = 0, 1.$$

La variable  $x_{ij}$  es diferente de cero si el objetivo  $i$  es asignado a la localidad  $j$  y es cero de otra forma. La función a optimizarse es cuadrática y no convexa, i.e., existe cierto número de óptimos locales, además el conjunto factible es un conjunto de permutaciones.

Una forma sencilla de interpretar el problema planteado es suponer que existen  $n$  sitios disponibles y se van a construir  $n$  edificios en estos lugares, entonces si  $f_{ip}$  es el número de personas por unidad de tiempo que viajarán entre los edificios  $i$  y  $p$ , y  $d_{jq}$  es la distancia entre los sitios  $j$  y  $q$ , lo que se desea es encontrar la asignación de los sitios de construcción de manera que la distancia total recorrida se minimice.

Un aspecto interesante de este problema es el hecho de que cuando una de las matrices de la función objetivo se restringe a ser una matriz de permutaciones cíclica, el problema de asignación cuadrático se reduce al problema del agente viajero.

Una formulación equivalente del problema es:

$$\text{Minimizar } F(\pi) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij} d_{\pi(i)\pi(j)},$$

donde  $\pi$  es una permutación del conjunto  $N=\{1,2,\dots,n\}$ . Equivalentemente, se desea encontrar una permutación  $\pi$  del conjunto  $N$  que minimice el valor de  $F(\bullet)$ .

## 2.1 Elementos de la BT para el QAP

Las siguientes definiciones describen los elementos de la búsqueda tabú para el QAP. Un movimiento es una transición de una permutación a otra. Un

atributo de un movimiento en este caso es simplemente un par no ordenado  $(i, j)$  de objetos que cambian sus localidades. El valor de un movimiento es la diferencia entre los valores de la función objetivo después y antes del movimiento. Si éste valor es negativo, el movimiento proporciona una mejora. La función *mejor\_movimiento* es una que identifica al par  $(i_{mejor}, j_{mejor})$  para el cual el valor de movimiento es el más pequeño. El dominio de la función *mejor\_movimiento* es el conjunto de movimientos admisibles. El mejor movimiento no tiene que ser necesariamente uno que mejore.

Una lista tabú de pares  $(i, j)$  de longitud *longitud\_tabú* se construye y actualiza. Si un par  $(i, j)$  pertenece a la lista tabú para una iteración dada, no se permite el intercambio de los objetos  $i$  y  $j$  en esa iteración, a menos que se satisfaga el criterio de aspiración que en este caso se cumple si el intercambio de los objetos  $i$  y  $j$  proporciona un valor de la función objetivo estrictamente mejor que cualquiera de los obtenidos hasta el momento.

Ahora bien, la diversificación se restringe para operarse sólo en ocasiones particulares. En este caso, se seleccionan las ocasiones donde ningún movimiento de mejora admisible existe. Por lo general, se utiliza la información de la frecuencia para penalizar a los movimientos que no mejoran la búsqueda mediante el asignar una penalización grande a intercambios de pares con mayores contadores de frecuencia.

Una implantación sencilla de tal técnica [7] se puede realizar de la siguiente manera: Primero, se cuenta el número de veces que cada movimiento digamos  $m$  se ha realizado en orden a calcular su frecuencia  $f(m)$ . Entonces una penalización  $p(m)$  se asocia a cada movimiento de la siguiente manera:

$$p(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ alcanza un criterio de aspiración.} \\ wf(m) & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

donde  $w$  es una constante. Entonces el valor del movimiento puede ser:

$$F(x + m) - F(x) + p(m).$$

El peso  $w$  depende del problema, del tipo de movimiento y de la vecindad como ya se ha mencionado antes.

Como se puede observar, la función de penalización depende directamente del criterio de aspiración, por lo que a continuación se proponen algunos de éstos.

Una vez que se han identificado los movimientos factibles y se ha calculado su correspondiente valor de la función objetivo, el estatus tabú de los candidatos factibles se prueba. Suponga que en una iteración dada (*iter*) el

valor de  $\pi(s)$ , donde  $s = s_i$ , cambia de  $i$  a  $i'$ , entonces a la facilidad  $\pi(i)$  le está prohibido ocupar la posición  $i$  durante un número específico de iteraciones. La matriz *tiempo\_tabú* se utiliza para forzar esta restricción tabú. El elemento  $(i, \pi(i))$  de la matriz *tiempo\_tabú* contiene el número de iteración en la cual se le permite de nuevo a la facilidad  $\pi(i)$  ser asignada a la posición  $i$ . Si el valor de la función objetivo de la solución anterior al movimiento es mejor que el valor de la función objetivo después de éste, entonces el tiempo tabú se calcula como:

$$\text{tiempo\_tabú}(i, \pi(i)) = 0.25 n^2,$$

de otra forma:

$$\text{tiempo\_tabú}(i, \pi(i)) = 0.75 n^2.$$

Este es un criterio de aspiración implícito dado en [7], donde a los elementos que contribuyen a soluciones con “buenos” valores de la función objetivo se les permite regresar más rápidamente para la prueba de soluciones actuales. El máximo tiempo que un movimiento puede clasificarse como tabú es el equivalente al 75% del tamaño de la estructura de *tiempo\_tabú*. Esto significa que en una iteración dada un mínimo del 25% de los movimientos posibles no se clasifican como tabú.

Ahora bien un criterio de nivel de aspiración de tipo explícito es el siguiente, el estatus tabú de un movimiento se elimina si el movimiento permite la búsqueda a una nueva solución *mejor de la región*. La solución mejor de la región es aquella con el mejor valor de la función objetivo durante digamos las  $n^2$  últimas iteraciones. Observe que este nivel de aspiración es más flexible que el utilizado típicamente en las implantaciones de BT, donde la mejor solución sobre todas sirve para propósitos similares.

Otro criterio explícito es una aspiración por *dirección del movimiento*. Siguiendo a [7], para implantar este criterio es necesario construir una matriz *dirección\_tabú*. Si el movimiento  $(i, \pi(i))$  llega a ser tabú durante una fase de mejoramiento, entonces el elemento  $(i, \pi(i))$  de la matriz *dirección\_tabú* contiene el número de la iteración de cuando la fase de mejoramiento comenzó, de otra forma al elemento se le da el valor de cero. El movimiento candidato factible  $(i, \pi(i))$  es elegible para seleccionarse en la iteración *iter* si:

$$\text{VFO}(\text{movimiento posterior}) \neq \text{VFO}(\text{movimiento anterior})$$

y ocurre al menos una de las siguientes:

$$- \text{tiempo\_tabú}(i, \pi(i)) < \text{iter}.$$

$$- \text{VFO}(\text{movimiento posterior}) < \text{VFO}(\text{mejor de la región}).$$

-  $dirección\_tabú(i, \pi(i)) \neq 0$  y  $dirección\_tabú(i, \pi(i)) = fase\_actual$ .

donde VFO es el valor de la función objetivo y  $fase\_actual$  es cero si la búsqueda se encuentra en una fase de no mejoramiento o el número de la iteración donde la actual fase de mejoramiento comenzó. El mejor movimiento en cualquier iteración es el movimiento elegible con mejor valor de movimiento.

## 2.2 Manejo dinámico de la lista tabú

El *manejo de la lista tabú* significa la actualización de ésta, *i.e.*, la decisión de cuántos y cuáles movimientos se pondrán como tabú para una iteración de la búsqueda. Muchas de las implantaciones de la búsqueda tabú utilizan un manejo de la lista tabú de tipo estático. De manera más precisa, los movimientos permanecen como tabú durante un número de iteraciones fijo, por lo que la eficiencia del algoritmo depende de la elección de la duración del estatus tabú o, equivalentemente, de la longitud de la lista tabú.

Este manejo de la lista tabú de tipo dinámico permite el examen más detallado de la región factible, por lo que es posible romper ciclos y diversificar la búsqueda.

Existen varios métodos de lista tabú dinámica, entre los que destacan: el método de la *secuencia de Cancelación* y el método de *eliminación inversa* propuestos en [7 y 8].

Ahora bien, también se puede manejar una longitud de LT de manera dinámica como la propuesta en [2] (se implementó con programación en paralelo), donde la longitud de la lista tabú varía de manera dinámica a través de diferentes configuraciones pasando de una a otra si ningún mejoramiento se encuentra en un número dado de iteraciones. Este conjunto de configuraciones permite un examen más detallado de la región factible mediante el incremento y decremento del número de movimientos tabú actuales vía las configuraciones. Además se propone un componente aleatorio que actúa cada vez que la lista tabú cae en la configuración 1 como un elemento de seguridad adicional contra el ciclado.

### 3 Experiencia computacional.

Los procesos usados para la experimentación fueron implementados en lenguaje C sobre una pc con tarjeta 486 DLC a 40 Mhz.

Varias versiones de BT y que se describen a continuación se probaron sobre el conjunto estándar de problemas de tamaño  $n = 5, 6, 7, 8, 12, 15, 20, 30$  dados en [9], los cuales se utilizan de manera amplia para probar la eficiencia de los algoritmos.

Para todo el conjunto de problemas se encontraron las mejores soluciones reportadas en la literatura.

Las versiones que se utilizaron de la búsqueda tabú tienen las siguientes características:

*BT1* : Estructura básica de BT, *i.e.*, se consideró la longitud de la lista tabú como un parámetro constante, el criterio de nivel de aspiración fue el estándar de la literatura, es decir, el nivel de aspiración se satisface si el movimiento a realizarse mejora el valor de la función objetivo con respecto de todos los movimientos realizados.

*BT2* : Se consideró una estructura básica de la BT y se agregó el criterio de nivel de aspiración proporcionado por la *matriz\_tabú* dado en la sección anterior.

*BT3* : En este marco de la BT se consideró el criterio de nivel de aspiración estándar, así como, un manejo de la lista tabú de tipo dinámico, como el propuesto en [2] para el caso de programación en paralelo y que se describe a continuación:

#### 3.1 Manejo Dinámico Propuesto:

Si no existe mejoramiento, entonces el movimiento se considera tabú si:

$$\liminf \leq \text{tabu}(i, j) \leq \limsup,$$

donde

$$\liminf = \begin{cases} 1 & \text{numiter Mod } 8 < 5, \\ t_{\text{tabu}}(\text{numiter Mod } 8)(0.2) & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

$$limsup = \begin{cases} ltabu((numiter \text{ Mod } 8) - 4)(0.2) & numiter \text{ Mod } 8 < 5, \\ ltabu & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

donde  $numiter$  es el número de iteración y  $ltabu$  es la longitud tabú.

En todos los casos, para la fase de diversificación regional de la búsqueda (que no se llegó a utilizar en ninguna de las instancias corridas), se consideró una función de penalización  $p(\bullet)$  como la descrita anteriormente, la cual no se ha reportado en la literatura para su adaptación en el problema de asignación cuadrático.

Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

n	Pto. Inic.	Valor Inic.	Long. Tabú	BT1		BT2		BT3		Valor Mejor
				Valor	Iter.	Valor	Iter.	Valor	Iter.	
5	1	66	5	(58)	1	50	11	50	14	50*
	2	58	5	(58)	0	50	11	50	11	50*
	3	72	5	50	1	50	1	50	1	50*
	4	68	5	(52)	6	50	12	50	4	50*
	5	82	5	(52)	5	50	12	50	12	50*
6	1	86	4	86	0	86	0	86	0	86*
	2	110	4	86	2	86	2	86	2	86*
	3	108	4	86	6	92	1	86	6	86*
	4	116	4	86	1	86	1	86	1	86*
	5	116	4	86	8	86	11	86	8	86*
7	1	174	5	148	23	148	21	148	23	148*
	2	240	5	148	10	148	10	148	10	148*
	3	216	5	148	4	148	4	148	4	148*
	4	228	5	148	18	148	18	148	18	148*
	5	202	5	148	19	148	19	148	19	148*
8	1	214	6	214	10	214	16	214	10	214*
	2	322	6	214	5	214	5	214	5	214*
	3	290	6	214	7	214	15	214	7	214*
	4	320	6	214	5	214	5	214	5	214*
	5	288	6	214	4	214	4	214	4	214*

Los valores entre paréntesis y el número de iteraciones respectivo son los mejores valores que se encontraron para cuando se excedía de un número fijo predeterminado de iteraciones *max\_iter*, el cual dependía del tamaño de los problemas, siendo los siguientes:

n	5	6	7	8	12	15	20	30
max_iter	15	15	25	25	700	2500	7500	12000

n	Pto. Inic.	Valor Inic.	Long. Tabú	BT1		BT2		BT3		Valor Mejor
				Valor	Iter.	Valor	Iter.	Valor	Iter.	
12	1	784	9	(586)	57	578	683	578	368	578*
	2	784	9	578	377	(586)	110	578	18	578*
	3	874	9	578	12	578	16	578	11	578*
	4	850	9	(586)	23	578	84	578	53	578*
	5	746	9	578	5	578	5	578	4	578*
15	1	1448	10	1150	1495	1150	46	1150	200	1150*
	2	1612	10	1150	1468	1150	375	1150	231	1150*
	3	1596	10	1150	2368	(1152)	53	(1152)	51	1150*
	4	1610	10	1150	1124	(1152)	181	(1152)	305	1150*
	5	1626	10	(1152)	33	(1152)	32	(1152)	32	1150*
20	1	3444	12	2580	7435	2570	559	2570	1014	2570
	2	3302	12	2570	5626	2570	954	2570	1841	2570
	3	3540	12	2570	1869	2570	701	2570	2197	2570
	4	3456	12	2570	918	2570	890	2570	887	2570
	5	3322	12	2570	1191	2570	613	2570	2408	2570
30	1	8060	18	6124	11048	6124	3628	(6158)	171	6124
	2	7758	18	6124	7294	(6128)	6223	6124	10692	6124
	3	8172	18	(6128)	972	6124	9842	(6148)	7740	6124
	4	7648	18	(6128)	2713	6124	3995	(6128)	1049	6124
	5	8224	18	6124	5748	6124	3839	(6148)	7881	6124

Cabe mencionar que la versión BT2 presentada en el trabajo no se ha reportado en la literatura como adaptada para el problema de asignación cuadrático.

Los puntos iniciales que se utilizaron para las corridas son los puntos iniciales dados por Nugent. Cabe mencionar que ésta es una gran diferencia con respecto a los reportes en la literatura, donde antes de utilizar la búsqueda tabú, utilizan algunas rutinas de construcción inicial, las cuales proporcionan “buenos” puntos iniciales.

A continuación se presentan: la tabla de promedios de los valores y del número de iteraciones de las corridas para cada uno de los problemas, la

tabla de eficiencias de los promedios de los valores encontrados, la tabla del número promedio de iteraciones para los casos en que se encontraron los valores óptimos o los mejores reportados, así como, la tabla de porcentajes de estos últimos.

La eficiencia se calculó tomando como base el mejor valor reportado  $z_{mej}$ , y se usó la ecuación:

$$eficiencia = 1 - \frac{z - z_{mej}}{z_{mej}}.$$

n	BT1		BT2		BT3		Valor Mejor
	Valor	Iter.	Valor	Iter.	Valor	Iter.	
5	54	2.6	50	9.4	50	8.4	50*
6	86	3.4	87.2	3	86	3.4	86*
7	148	14.8	148	14.4	148	14.8	148*
8	214	6.2	214	9	214	6.2	214*
12	581.2	94.8	579.6	179.6	578	90.8	578*
15	1150.4	1297.6	1151.2	137.4	1151.2	163.8	1150*
20	2570	3407.8	2570	743.4	2570	1669.4	2570
30	6125.6	5555	6124.8	5505.4	6141.2	5506.6	6124

Tabla de promedios de las corridas.

Tabla de eficiencias sobre valores promedios.			
5	0.920	1	1
6	1	0.986	1
7	1	1	1
8	1	1	1
12	0.994	0.997	1
15	0.999	0.998	0.998
20	1	1	1
30	0.999	0.999	0.997



Tabla del promedio de iteraciones donde se encontró el óptimo								
n	Promedio de Iteraciones				Porcentajes			
	BT1	BT2	BT3	BT1	BT2	BT3		
5	-	9.4	8.4	-	1.119	1		
6	3.4	3	3.4	1.133	1	1.133		
7	14.8	14.4	14.8	1.027	1	1.027		
8	6.2	9	6.2	1	1.451	1		
12	131.33	197	90.8	1.446	2.169	1		
15	1613.75	210.5	215.5	7.666	1	1.023		
20	3407.8	743.4	1669.4	4.584	1	2.245		
30	8030	5326	10692	1.507	1	2.007		

## 4 Conclusiones

Cabe mencionar que la versión BT2 presentada en este trabajo no se ha reportado en la literatura como adaptada para el problema de asignación cuadrático.

Los puntos iniciales que se utilizarán para las corridas son los puntos iniciales dados en [9]. Cabe mencionar que ésta es una gran diferencia con respecto a los reportes en la literatura, donde antes de utilizar la técnica de la búsqueda tabú, se utilizan algunas rutinas de construcción inicial, las cuales proporcionan “buenos” puntos iniciales.

Por último deseamos realizar el comentario de que la utilización de equipos “pequeños” proporciona que se deba de programar de manera eficiente, una vez logrado ésto, se tendrá mayor confianza en correr los sistemas en equipos mayores.

### Agradecimientos

Deseamos agradecer a los árbitros anónimos que con sus valiosas sugerencias permitieron una mejora substancial del presente trabajo.

## 5 Referencias

- [1] Brandeau M.I. and Chiu S. S., (1989), *An Overview of Representative Problems in Location Research*, Management Science, **35**:6, pp. 645-674.
- [2] Chakraprani J. and Skorin-Kapov, (1993), *Masevilly Parallel Tabu Search for the Quadratic Assignment Problems*, Annals of Ops. Res., **41**, pp. 327-341.
- [3] de los Cobos S.S., (1987) *Un Sistema para la Resolución del Problema de Localización*, tesis de maestría, Colegio de Posgraduados, México.

- [4] de los Cobos S. S., Pérez S. B. R., y Gutierrez A. M.A., (1997), *Programación Estocástica en Optimización*, minicurso, (eds. Castillo W. y Trejos J.), Liberia, Costa Rica, pp. 31-45.
- [5] Glover F., (1989), *Tabu Search, Part I*, ORSA Journal on Computing, **1**:3, pp. 190-206.
- [6] Glover F., (1990), *Tabu Search, Part II*, ORSA Journal on Computing, **2**:1, pp. 4-31.
- [7] Laguna M. and Kelly J., (1993), em Master Production Scheduling in a Single Facility with Sequence-Dependent, technical report (september), Graduate School of Business and Administration, University of Colorado at Boulder.
- [8] Love R. F., Morris J.G. and Wesolowsski G. O., (1988), *Facility Locations*, Ed. North-Holland.
- [9] Nugent C., Vollman T. and Rulm J., (1968), *An Experimental Comparison of Techniques for Assignment of Facilities to Location*, Operation Research, **16**, pp. 150-173.

## FUZZY MATHEMATICAL PROGRAMMING APPLIED TO THE CAPITAL BUDGETING PROBLEM

JOSÉ C. ROMERO CORTÉS \*– ARTURO AGUILAR V. \*

---

### Abstract

The capital budgeting problem, formulated and partially solved by Lorie-Savage [1], to choose projects when the capital budget is fixed, maximizing the net present value, is in this paper formulated applying fuzzy mathematical programming, expanding the approach used by H. Martin Weingartner[2]. The capital budgeting techniques for budgets choosing and management are being extensively applied in-day in private, government and social sectors. Nowadays, financial dynamics is becoming so changeable than a deterministical approach, or even a stochastic one, can be so simple as not-realistic approach; and for these reasons it is starting the use of another kind of alternative mathematical models, for example budgeting techniques based in fuzzy data and fuzzy logic.

**Keywords:** Budgeting problem, fuzzy sets, mathematical programming, fuzzy mathematical programming, crisp restrictions.

### Resumen

---

\*Universidad Autónoma Metropolitana - Unidad Azcapotzalco, Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamps., México D.F., México; Tel.: 724 4552, Fax: 394 4534, e-mail: rcjc@hp9000a1.uam.mx

Los métodos de presupuestación de capital, para la selección y administración de presupuestos se aplican ampliamente no sólo en el sector privado y gobierno sino también en el sector social. Actualmente la dinámica financiera es tan cambiante que un enfoque determinístico e inclusive uno estocástico puede resultar poco realista, es por ésto que se empiezan a utilizar otros enfoques, por ejemplo los procedimientos de presupuestación usando datos y lógica difusa.

## 1 Introduction

The article “Three problems in rationing capital” of James H. Lorie and Leonard J. Savage, consider the problem confronted by a firm which must assign available capital or liquid resources among competing investment opportunities. They discuss three problems in the rationing of capital, in the sense of liquid resources:

- i) Given the capital cost, what group of investments should be selected?
- ii) Given a fixed sum for capital investment, what group of investment proposals should be undertaken?
- iii) How should a firm select the best among mutually exclusive alternatives?

## 2 A Mathematical Programming Approach To The Lorie-Savage Problem

In the article “Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems”, H.Martin Weingartner emphasizes that the Lorie -Savage problem is concerned with a firm confronted with a variety of possible investment project and a fixed capital budget, where the cash flows associated with each project are given and the cost of capital for the firm is assumed to be known and to be independent of the investment decision, thus making the calculation of a net present value for each project possible. This net present value is defined as the algebraic sum of the elements of its stream of cash receipts and outlays discounted by the cost of capital. The objective is then to select from among the projects which lead to the highest present value for this firm.

The foregoing formulation was formerly expressed by H. Martin Weingartner (1967) in the context of mathematical programming, specifically integer programming with crisp restrictions, in the following terms:

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^n b_j x_j \quad (1)$$

subject to

$$\sum_{j=1}^n C_{tj} x_j \leq C_t, \quad t = 1, 2, \dots, T$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

where:

$C_{tj}$  : cost of project  $j$ -th in the period  $t$ ,

$C_t$  : budget ceiling in the period  $t$ ,

$b_j$  : the present value of all revenues and costs associated with the  $j$ -th project,

$x_j$  : decision variable, which implies that a  $j$ -th project is either accepted (i.e.  $x_j = 1$ ) or it is rejected (i.e.  $x_j = 0$ ),

$T$  : planning horizon,

$n$  : number of periods.

Then (1) is a simple model for selecting among independent alternatives in those projects where total present value is maximum, but where total outlay in each project falls within the budget limitation.

### 3 A Fuzzy Mathematical Approach to the Lorie-Savage Problem

Let us consider the case in which what is looked for is not the maximization of  $Z$  but the achievement of a certain level of aspiration (yield). In the same way, let us suppose that each of the restrictions can be violated up to a certain tolerance level according to membership functions associated with budget ceilings  $C_t$ , and finally we add the restriction that at the most  $C$

dollars will be spend during the planning horizon of  $T$  periods. This problem thus set forth can be formulated as:

$$\text{Max } \tilde{Z} = \sum_{j=1}^n b_j x_j \quad (2)$$

subject to

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n C_{tj} x_j &\lesssim C_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \\ \sum_{t,j} C_{tj} x_j &\leq C \\ x_j &\in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

where the symbol  $\sim$  indicates the fuzziness of the terms involved, i.e. not crisp. Let us suppose that the level of aspiration is about  $M_0$  dollars, i.e. that the decision maker would be agree to get at least this quantity in return, in according to the next membership function:

$$\mu_G(r_0) = \begin{cases} 1 - \frac{r_0}{P_0}, & \sum_{j=1}^n b_j x_j = M_0 - r_0, r_0 \geq 0 \\ 1, & \sum_{j=1}^n b_j x_j \geq M_0 \end{cases} \quad (3)$$

where  $r_0$  is the quantity by which  $M_0$  can be diminished with  $r_0 \leq P_0$ . And we suppose that the decision maker is predisposed to tolerate a violation of  $r_t$  (until  $M_t > 0$ ), in the constraint  $t$ , according to the following membership function:

$$\mu_{R_t}(r_t) = \begin{cases} 1 - \frac{r_t}{M_t}, & \sum_{j=1}^n C_{tj} x_j = C_t + r_t, r_t \geq 0, t = 1, 2, \dots, T \\ 1, & \sum_{j=1}^n C_{tj} x_j \leq C_t, t = 1, 2, \dots, T \end{cases} \quad (4)$$

The membership functions correspond to the graphics shown in figure 1.

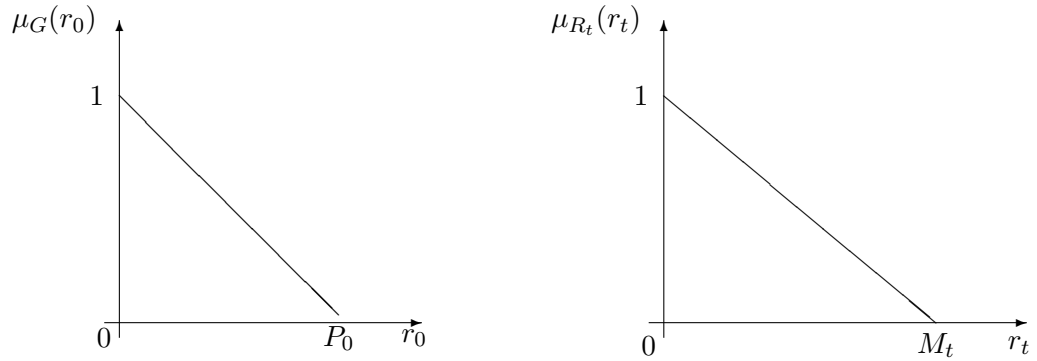


Figura 1: Membership functions  $\mu_G(r_0)$  and  $\mu_{R_t}(r_t)$

Therefore, the foregoing problem may be expressed in the mathematical programming conventional form, as:

$$\text{Max } \lambda \tag{5}$$

subject to:

$$P_0\lambda + r_0 \leq P_0$$

$$r_0 \leq P_0$$

$$M_t\lambda + r_t \leq M_t \quad t = 1, 2, \dots, T$$

$$r_t \leq M_t \quad t = 1, 2, \dots, T$$

$$-\sum_{j=1}^n b_j x_j - r_0 \leq -M_0$$

$$\sum_{j=1}^n C_{tj} x_j - r_t \leq C_t \quad t = 1, 2, \dots, T$$

$$\sum_{t,j} C_{tj} x_j \leq C$$

$$x_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\lambda \in \mathbb{R}, r_t \geq 0 \quad t = 1, 2, \dots, T$$

which correspond to a problem of mixed linear programming, the solution of which can be found by using conventional algorithms; the optimal solution  $(\lambda^0, x_1^0, \dots, x_n^0, r_0^0, \dots, r_T^0)$  means the following:

- $\lambda^0$  is degree of membership of the optimal solution, taking into account the membership functions of the objective and constrains, i.e. the restrictions and objective are satisfied in this order.
- $x_j^0 = 0$  if the  $j$ -th project is rejected and 1 when it is accepted.
- $r_t^0$  is the quantity by which the  $t$ -th constraint is violated.

Moreover, it is easy to calculate  $Z^0 = \sum_{j=1}^n b_j x_j^0$ .

## 4 Application

We consider the case in which there are 4 projects with one year planning horizon each one. The department  $A$  has 2 projects and department  $B$  has 2 projects. Here the decision variables are  $x_{ij}$  instead of  $x_{tij}$  because the planning horizon is one year for all the projects, then we have:

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if the } j\text{-th project of the } i\text{-th department is rejected} \\ 1 & \text{if the } j\text{-th project of the } i\text{-th department is accepted} \end{cases}, i = A, B \quad j = 1, 2.$$

The following table and numbers show the involved parameters in this problem:

$b_{ij}(C_{ij})$	Projects	
Departments	1	2
A	4(20)	2.8(15)
B	5.6(29)	3.1(18)

$$\begin{aligned} C_A &= 18, C_B = 25 \\ M_0 &= 10, M_1 = 2, M_2 = 8 \\ C &= 50, P_0 = 8. \end{aligned}$$

The problem expressed in terms of a fuzzy mathematical problem is:

$$\text{Max } \tilde{Z} = 4x_{A1} + 2.8x_{A2} + 5.6x_{B1} + 3.1x_{B2} \quad (6)$$

subject to

$$20x_{A1} + 15x_{A2} \lesssim 18$$

$$29x_{B1} + 18x_{B2} \lesssim 25$$

$$20x_{A1} + 15x_{A2} + 29x_{B1} + 18x_{B2} \leq 50$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = A, B; \quad j = 1, 2.$$



This problem is equivalent to the next crisp problem of mathematical programming:

$$\text{Max } \lambda \tag{7}$$

subject to

$$-4x_{A1} - 2.8x_{A2} - 5.6x_{B1} - 3.1x_{B2} - r_0 \leq -10$$

$$20x_{A1} + 15x_{A2} - r_1 \leq 18$$

$$29x_{B1} + 18x_{B2} - r_2 \leq 25$$

$$20x_{A1} + 15x_{A2} + 29x_{B1} + 18x_{B2} \leq 50$$

$$8\lambda + r_0 \leq 8$$

$$2\lambda + r_1 \leq 2$$

$$8\lambda + r_2 \leq 8$$

$$r_0 \leq 8$$

$$r_1 \leq 2$$

$$r_2 \leq 8$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = A, B; \quad j = 1, 2.$$

$$\lambda \in \mathbb{R}; \quad r_0, r_1, r_2 \geq 0.$$

Let us obtain the optimal solution:

$$\lambda^0 = 0.5, \quad r_0^0 = 1.6, \quad r_1^0 = 0, \quad r_2^0 = 4$$

$$x_{A1} = x_{B2} = 0, \quad x_{A2} = x_{B1} = 1$$

$$Z^0 = 8.4$$

The solution means that projects 2nd of department *A* and 1st of the department *B* are selected. The amount of 25 budget for *B* projects is increased to 29 and the return would be 8.4, lower than the one fixed at 10, and this solution gives 0.5 as the aspiration level.

## 5 Concluding remarks

Because a fuzzy set is a generalization of the ordinary set, the ideas set forth by Lorie-Savage and formulated in the context of integer programming by H.M. Weingartner can be generalized in the context of fuzzy mathematical programming. The decision maker will be benefited because he will be able to incorporate his preferences, vagueness and intuitions in the model; this will result in a more appropriate solution than if the problem had been dealt with conventional mathematics.

## Referencias

- [1] Lorie, J.H.; Savage, L.J. (1955) “Three problems in rationing capital”, *Journal of Business*.
- [2] Weingartner, H.M. (1967) *Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems*. Markham Publishing Company. A Ford Foundation Prize Dissertation.
- [3] Zadeh, L. A. (1965) “Fuzzy Sets”, *Information and Control* **8**: 338–353.
- [4] Kaufmann, A.; Gupta, M.M. (1991) *Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Sciences*. North-Holland, Amsterdam.
- [5] Microsoft Excel, Microsoft Co., 1994
- [6] Manton, K.G. (1996) *Statistical Applications using Fuzzy Sets*. Wiley Interscience, New York.
- [7] Tolley, H.D.; Manton, K.G. (1991) “Intervention effects among a collection of risks”, *Transactions of the Society of Actuaries*.
- [8] Zimmermann, H.J. (1990) *Fuzzy Set Theory and its Applications*. Kluwer Academic Publishers.
- [9] Vertrees, J.C. (1993) “A model for allocation budgets in a closed system which simultaneously computes diagnosis related group allocation weights”, *Operations Research*.

## CONJUNTOS APROXIMADOS Y ALGORITMOS GENÉTICOS

JOSÉ LUIS ESPINOZA B. \*

---

### Resumen

Se presenta un resumen de la teoría básica de los conjuntos aproximados (*rough sets*) y de los algoritmos genéticos. Al final se propone un algoritmo genético para el cálculo de conjuntos aproximados.

**Palabras clave:** algoritmos genéticos, conjuntos aproximados, inteligencia artificial, optimización.

### 1 Introducción

Teniendo un conjunto de objetos sobre los que se ha medido una serie de características o atributos, se llaman *conjuntos aproximados* a combinaciones de esos atributos que describan lo mejor posible al conjunto de objetos. En muchas ocasiones se tiene además una partición o clasificación previa de los objetos y lo que se pretende es dar una caracterización de las clases de esa partición mediante los atributos observados ([11], [13]). Este es un objetivo muy similar al de la discriminación en estadística ([2]).

En términos generales, la teoría de los conjuntos aproximados, propuesta por Pawlak ([10]), consiste en explorar los conjuntos cociente asociados a las

---

\*Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica, Cartago, Costa Rica

relaciones de equivalencia definidas por agrupaciones de los atributos observados. Esta exploración tiene una complejidad computacional más elevada que la de los métodos clásicos de discriminación, pues el espacio de búsqueda de soluciones tiene una cardinalidad muy elevada y en ocasiones el usuario puede quedar satisfecho con una solución no óptima del criterio. Los algoritmos genéticos tienen la cualidad, en diversos problemas, de aproximar bastante bien las soluciones óptimas.

La importancia que tienen los conjuntos aproximados en el tratamiento estadístico de datos es que permiten, por un lado, eliminar información superflua y, por tanto, la posible eliminación de mediciones innecesarias que se hacen de algunos atributos definidos sobre los datos con el correspondiente ahorro de tiempo y la eliminación de costos. Por otro lado, las tablas de datos reducidas están más cerca de lo que puede ser una base de conocimiento para la generación de sistemas expertos.

La aplicación de los algoritmos genéticos puede servir a la teoría de los conjuntos aproximados mediante una adecuada representación cromosómica de los conjuntos y la definición de una función de adecuación apropiada para el problema.

## 2 Conjuntos aproximados

Los conjuntos aproximados (CA) fueron introducidos por Pawlak ([10]). Su estudio se ubica dentro del campo de la inteligencia artificial que tiene que ver con la vaguedad de datos imprecisos, tratando de descubrir relaciones entre éstos ([11]). Desde el punto de vista matemático, el enfoque de conjuntos aproximados es bastante simple, pues sólo requiere del manejo de conjuntos finitos, cardinalidades y relaciones de equivalencia. Su fortaleza está en que constituye una herramienta para la simplificación de la información y para que los datos concretos se hagan más discernibles.

Se parte de una tabla de datos  $T = \{x_1, x_2, \dots, x_K\}$  de  $K$  datos u observaciones sobre los que se ha medido  $L$  atributos cualitativos<sup>1</sup>  $X = \{x^1, x^2, \dots, x^L\}$ . Además, los datos están previamente clasificados en  $m$  clases o categorías  $Y_1, Y_2, \dots, Y_M$ .

Dada la clase  $Y_j$ , ésta puede verse como uno de los conceptos que han servido para categorizar los datos (filas); lo que se busca es un subconjunto de atributos (la menor cantidad posible) que caractericen totalmente a una buena aproximación  $Y'_j$  de  $Y_j$ . La aproximación  $Y'_j$  se construye vía una relación de equivalencia definida sobre las filas de  $T$  y lo que se busca es una relación definida por un subconjunto  $A$  del conjunto de atributos ( $A \subseteq X$ )

---

<sup>1</sup>Si uno o más de los atributos es cuantitativo puede usarse un algoritmo conocido como *Algoritmo de Fisher* para hacer una recodificación, de forma que los atributos sean todos cualitativos.

en la que haya la mayor cantidad posible de individuos de  $Y_j$  relacionados entre sí.

Este tipo de aproximaciones de  $Y_j$  permite eliminar atributos y observaciones redundantes para  $Y_j$  en la caracterización de este conjunto. La eliminación de atributos permite obtener un modelo para  $Y_j$  al crear un conjunto mínimo de variables que expliquen suficientemente el concepto  $Y_j$ .

Un CA es un modelo matemático para la clasificación aproximada que hace uso de dos subconjuntos de  $T$  llamados *aproximación inferior* y *aproximación superior* respecto a un subconjunto del conjunto de atributos.

Si  $X = \{x^1, x^2, \dots, x^L\}$  es el conjunto de atributos,  $x_i^j$  denota el valor del atributo  $x^j$  en la observación  $i$ . Dado  $A \subseteq X$ ,  $A \neq \emptyset$ , se define la relación de equivalencia  $R$ :

$$x_i R x_h \iff x_i^j = x_h^j \quad \forall x^j \in A.$$

Para cada fila  $x_i$  de  $T$ ,  $[x_i]_R$  denota la clase de equivalencia de  $x_i$ .

Para todo concepto  $Y_j$  se definen los conjuntos:

$$I(Y_j) = \{x_i \in T : [x_i]_R \subseteq Y_j\}$$

$$S(Y_j) = \{x_i \in T : [x_i]_R \cap Y_j \neq \emptyset\}$$

$I(Y_j)$  y  $S(Y_j)$  se llaman, respectivamente, la *aproximación inferior* y *superior* de  $Y_j$ . Es claro que  $I(Y_j) \subset S(Y_j)$

## 2.1 Medidas de calidad de la aproximación

Para cada  $Y_j$ , para cualquier  $A \subseteq X$ , con  $A \neq \emptyset$  se define la *calidad de la aproximación del conjunto  $Y_j$*  como el índice

$$W_j(A) = \frac{\text{card } I(Y_j)}{\text{card } S(Y_j)}.$$

También se define la *calidad de la aproximación de la clasificación* como el índice

$$W_C(A) = \frac{\sum_{i=1}^M \text{card } I(Y_i)}{K}$$

y el siguiente índice sirve para medir la *exactitud de la aproximación de la clasificación*

$$W_e(A) = \frac{\sum_{i=1}^M \text{card } I(Y_i)}{\sum_{i=1}^M \text{card } S(Y_i)}.$$

La idea de una implementación de conjuntos aproximados es intentar reducir el número de atributos manteniendo esos índices en un nivel lo más alto posible.

### 3 Algoritmos genéticos

Los algoritmos genéticos han mostrado tener una gran capacidad para encontrar soluciones óptimas o cuasi-óptimas en una gran diversidad de problemas de optimización combinatoria ([1]), valiéndose de una emulación de los procesos evolutivos que ocurren en la naturaleza. Para realizar tal emulación se trabaja con poblaciones de objetos o individuos que de manera abstracta son provistos de una representación cromosómica y van evolucionando a lo largo de varias generaciones. Para pasar de una generación a la siguiente se hace una selección de individuos, dando mejores posibilidades a aquellos que tengan mayor grado de adaptabilidad al medio; a éstos se le aplican operadores genéticos tales como el cruzamiento y las mutaciones, inspirados en los análogos biológicos ([3], [4],[5], [8], [9]).

Típicamente, un problema de optimización que se modele mediante un AG debe contener los siguientes elementos:

- A. Una *representación genética* de las soluciones factibles del problema. A estas representaciones o a las soluciones factibles asociadas se les suele dar el nombre de *individuos*. Usualmente la representación genética de las soluciones factibles consisten en un cromosoma (representación *aploide*) o varios (representación *diploide*). Las tiras cromosómicas contienen  $L$  *valores alelos*. En el algoritmo genético se trabaja iterativamente con una *población* de individuos que irá cambiando de una generación a otra. Una *generación* corresponde a la población que se tenga en una iteración particular. La población inicial se genera a partir de algún criterio que usualmente es al azar.

- B. Una *función evaluadora*  $f$  positiva para medir el grado de adaptabilidad de los individuos. Se pretende resolver el problema de maximización de  $f$  sobre el espacio de individuos.
- C. Unos *operadores genéticos* que serán aplicados a la población dada, al pasar de una generación a otra. Los operadores genéticos más usados son el *cruzamiento* y la *mutación*.
- D. Un mecanismo de selección de los individuos que pasarán de una población a la siguiente. Lo usual es simular una ruleta en la que a cada individuo de la población es representado mediante un sector circular de la ésta, proporcional (respecto a la suma total) a su evaluación en  $f$ . La probabilidad de que un individuo  $\omega_i$  sea seleccionado es mayor en la medida en que  $f(\omega_i)$  sea grande respecto al resto de evaluaciones.
- E. La especificación de los *parámetros* que intervienen en el algoritmo, tales como tamaño de la población, probabilidad de cruzamiento, probabilidad de mutación, etc.

Si denotamos:

$t$  : una iteración o generación particular del algoritmo genético,

$MaxGen$  : el número máximo de generaciones que se van a considerar,

$P_t$  : la población que se tiene en una generación  $t$ ,

$N$  : el número de individuos que conforman la población,

$PI$  : una población intermedia que se selecciona para aplicarle los operadores genéticos,

el siguiente es un resumen de la secuencia de pasos del algoritmo genético:

### **Algoritmo genético**

$t \leftarrow 0$

Generar  $P_0$  ( población Inicial)

Evaluar  $f$  en  $P_0$



Mientras  $t \leq \text{MaxNumGen}$  :

- 1 Seleccionar PI (población Intermedia) de  $P_t$
- 2 Hacer Cruce entre individuos de  $PI$  con probabilidad  $p_c$
- 3 Hacer Mutaciones en  $PI$  con probabilidad  $p_m$
- 4  $P_{t+1} \leftarrow PI$
- 5 Evaluar  $f$  en  $P_{t+1}$ .
- 6  $t \leftarrow t + 1$

Fin.

En [12] se analiza la convergencia del algoritmo genético mediante cadenas de Markov y se concluye que no converge a la solución óptima; pero haciendo una modificación al algoritmo en la que se maneja un llamado “super-individuo” adicional que siempre será colocado en una posición fija de la población. Este es calculado como el individuo  $\omega_t^*$  de la población, con mayor desempeño en  $f$ . En cada iteración  $t$  se copia en  $P_{t+1}$  el super-individuo de  $P_t$  sin hacerle mutaciones ni cruzamientos. Esta variante del AG sí asegura convergencia al óptimo global ([12]).

**Modificación a los pasos 1,..., 6 del AG para asegurar convergencia:**

- 1 Hacer Cruce entre los individuos de  $P_t$ , excepto el primero.
- 2 Hacer Mutaciones en los individuos de  $P_t$ , excepto en el primero.
- 3 Evaluar  $f$  en  $P_t$ .
- 4 Calcular  $\omega_t^*$ .
- 5 Incluir  $\omega_t^*$  como primer miembro de  $P_{t+1}$ .
- 6 Seleccionar de  $P_t$  los  $K$  individuos restantes para completar la población  $P_{t+1}$ .
- 7  $t \leftarrow t + 1$

## 4 Propuesta de un algoritmo genético para obtener conjuntos aproximados

### 4.1 Representación genética de un conjunto de atributos

Para modelar subconjuntos del conjunto de atributos puede usarse una representación aploide mediante un cromosoma binario de longitud  $L$  por cada subconjunto, donde  $L$  es el número total de atributos observados y:

0 : significa que el atributo correspondiente no está incluido en el subconjunto.

1 : significa que sí lo está.

Por ejemplo, si  $X = \{x^1, x^2, x^3, x^4, x^5\}$  es el conjunto de atributos, la representación binaria del subconjunto  $A = \{x^1, x^3, x^4\}$  es  $A = (1\ 0\ 1\ 1\ 0)$ , la cual indica que en  $A$  sólo están presentes los atributos 1, 3 y 4.

En el algoritmo genético que proponemos nos apegamos a la modificación hecha anteriormente para asegurar convergencia, y se trabajará con una población  $P_t = \{A_0, A_1, \dots, A_N\}$  de estas representaciones binarias de subconjuntos de  $X$ .

### 4.2 Función de adecuación (*fitness*)

Para cada subconjunto  $A$  del conjunto de atributos puede usarse uno de los índices de calidad ( $W$ ) definidos por Pawlak, adaptándolo en una función de adecuación  $f$  definida sobre el conjunto potencia de  $X$ , de forma tal que al maximizarla se estimule la presencia de pocos atributos.

Así,  $\forall A \subset X$ , en caso de que se utilice la calidad de la aproximación de la clasificación,

$$W_C(A) = \frac{\sum_{i=1}^m \text{card } I(Y_i)}{K}$$

$$\text{se define } f(A) = \frac{W_C(A) + q}{W_C(A) + L}$$

donde  $q$  es el número de ceros en  $A$  y por lo tanto, la cantidad de atributos ausentes en  $A$ . En cada generación del algoritmo genético se pueden guardar para la siguiente generación los cromosomas tales que  $f$  esté en un umbral  $[\rho, 1]$

### 4.3 Selección y operadores genéticos

La **selección** se hace simulando la ruleta descrita anteriormente y la probabilidad de que un conjunto  $A_i$  de atributos sea seleccionado es

$$\frac{f(A_i)}{\sum_{j=1}^N f(A_j)}$$

Esta probabilidad es mayor en la medida en que  $f(\omega_i)$  sea grande respecto al total de evaluaciones.

Debido a que la representación cromosómica es binaria, las **mutaciones** de un subconjunto  $A = (a_1 a_2 \dots a_L)$  se hacen realizarían escogiendo al azar una posición  $j_0$  y, con probabilidad  $p_m$  cambiar  $a_{j_0}$  por su valor complementario (de 0 cambiar a 1 y viceversa) :  $a_{j_0} \leftarrow 1 - a_{j_0}$ .

Podemos hacer los **cruzamientos** simples con un solo punto de cruce escogido al azar. Dados  $A$  y  $B$  subconjuntos de  $X$  representados en forma binaria:

$$A = (a_1 a_2 \dots a_L)$$

$$B = (b_1 b_2 \dots b_L)$$

Si  $j_0 \in \{1, 2, \dots, L - 1\}$  es un punto de cruce<sup>2</sup> escogido al azar, con probabilidad de cruzamiento  $p_c$ , intercambiamos en  $A$  y  $B$  los bloques separados por  $j_0$ , formándose así otros dos subconjuntos de  $X$ ,  $A'$  y  $B'$ :

$$A' = (a_1 \dots a_{j_0} | b_{j_0+1} \dots b_L)$$

$$B' = (b_1 \dots b_{j_0} | a_{j_0+1} \dots a_L)$$

### 4.4 Algoritmo:

- Leer la tabla de datos  $T$ :

$$T = \left( \begin{array}{cccc|c} x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^L & y_1 \\ x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^L & y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_K^1 & x_K^2 & \dots & x_K^L & y_K \end{array} \right)$$

donde  $y_1, y_2, \dots, y_K \in \{Y_1, \dots, Y_M\}$  es la partición de las filas de  $T$ .

---

<sup>2</sup>Otras variantes de cruzamiento tienen que ver con la escogencia de dos o más sitios de corte y luego, con probabilidad  $p_c$  intercambiar los bloques.

- $t \leftarrow 0$
- Generar al azar una población inicial  $P_0 = \{A_0, A_1 \dots A_N\}$  de subconjuntos  $A_i$  de  $X$  en forma binaria.
- - 1 Para  $j = 1, \dots, \frac{N}{2}$ 
    - Escoger dos subconjuntos  $A$  y  $B$  de  $P_t$  al azar, excepto el primero.
    - Con probabilidad  $p_c$  cruzar  $A$  y  $B$ .
  - 2 Para  $j = 1, \dots, N$ :
    - Escoger al azar una posición  $h$  en  $\{1, \dots, L\}$  del conjunto  $A_j$  en  $P_t$ .
    - Con probabilidad  $p_m$ , cambiar el valor  $h$  de  $A_j$  por su valor complementario.
  - 3 Evaluar  $f$  en  $P_t$ .
  - 4 Calcular  $\omega_t^*$ .
  - 5 Incluir  $\omega_t^*$  como primer miembro de  $P_{t+1}$ .
  - 6 Seleccionar de  $P_t$ , mediante el mecanismo de ruleta, los  $K$  individuos restantes para completar la población  $P_{t+1}$ .
  - 7  $t \leftarrow t + 1$
- Fin.

## Conclusión:

Los algoritmos genéticos, adaptados para asegurar su convergencia al óptimo global, pueden aplicarse al cálculo de conjuntos aproximados, haciendo una apropiada representación de los subconjuntos del conjunto de atributos explicativos. De esta manera, estamos aportando un algoritmo de cálculo que busca el óptimo global de la aproximación, premiando de paso la presencia de pocos atributos.

## Referencias

- [1] Davis, L.; Steenstrup, M. (1987) "Genetic algorithms and simulated annealing: an overview", *Genetic Algorithms and Simulated Annealing*, L. Davis (ed.). Pitman, Londres.

- [2] Diday, E.; Lemaire, J.; Pouget, J.; Testu, F. (1982). *Eléments d'Analyse de Données*. Ed. Dunod, Paris.
- [3] Espinoza, J.L. (1995) "Algoritmos genéticos y optimización de funciones", *IX Simposio Métodos Matemáticos Aplicados a las Ciencias*, J. Trejos (ed.), Turrialba, Costa Rica, pp. 33-42.
- [4] Goldberg, D.E. (1989) *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley, Reading-Mass.
- [5] Holland, J.H. (1975) *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press, Ann Arbor.
- [6] Koza, J.R. (1994) "Introduction to genetic programming", *Advances in Genetic Programming*, K.E. Kinneer Jr (ed.), The MIT Press, Cambridge, Mass., pp. 21-42.
- [7] Lerman, I. C.; Ngouenet, R. F. (1995) *Algorithmes Génétiques Séquentielles et Parallèles pour une Représentation Affine des Proximités*. Rapport de Recherche No. 2570, Janvier, INRIA, France.
- [8] Michalewicz, Z. (1994) *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*. Springer-Verlag. Second, extended edition.
- [9] Núñez, M. (1994). *Algoritmos Genéticos*. Memorias del Seminario de Investigación en Análisis de Datos, Universidad de Costa Rica.
- [10] Pawlak, Z. (1982) "Rough sets" *Int. J. of Computer and Information Sciences*, 11(5), pp. 341-356.
- [11] Pawlak, Z. (1985) *Rough Sets*. Kluwer Publ. Co., Dordrecht.
- [12] Rudolph, G. (1994) "Convergence analysis of canonical genetic algorithms". *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 5, No. 1, January.
- [13] Trejos, J. (1994) *Contribution à l'Acquisition Automatique de Connaissances à Partir de Données Qualitatives*. Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse.

## HUMAN RESOURCE OPTIMIZATION

STERNEMANN – SPOERI – FRITSCH \*– MILENA DIDIC †

---

### Abstract

In the scope of the German Federal Program PRODUCTION 2000, the Project DARIF works on application of various mathematical methods and software tools for decentralized organization structures of DARIF industrial partners.

One of the industrial partners is the publishing company BURDA. At the printing deadline for the BURDA magazine FOCUS all necessary machines have to be ready. This means that the pool of the available personnel has to complete various activities.

To accomplish human resource optimization in the task above we use the following methods: CIMOSA (Computer Integrated Open Systems Architecture) methodology to develop Resource and Function Views models as well as to execute models of the enterprise activities Operations of relational algebra implemented in SQL data bases to select and update attributes of resource and activities during model execution Petri Nets for time simulation runs of activity models Gantt diagrams for efficient help in decision making.

In our implementation process on the personal computer we employ various software tools as MS Access SQL server, Petri Net tool PACE and the MS Project to consult Gantt diagrams.

According to our work BURDA is able to accomplish the related activities using 30

---

\*Fachhochschule Offenburg, Alemania

†Escuela de Ingeniería Química, Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica

**Keywords:** Resource optimisation, CIMOSA, SQL, relational algebra, Petri Nets.

## SINCRONIZACIÓN DE FLUJO MULTIMEDIA POR LA APLICACIÓN DE RELACIONES CAUSALES

RAÚL JACINTO M. \* – RAÚL GARCÍA M.\* – ROBERTO GÓMEZ C.\*

---

### Resumen

El diseño de aplicaciones multimedia requiere la resolución de la sincronización en el espacio y en el tiempo de los objetos multimedia que lo componen. En particular, cuando se diseñan aplicaciones multimedia distribuidas se requiere la transmisión de objetos multimedia entre los participantes de la aplicación. Conforme el auge en las redes de comunicación se incrementa, son necesarios mecanismos que aseguren no sólo una transmisión confiable, sino también la sincronización en el manejo de los objetos multimedia que forman la aplicación.

El problema consiste en diseñar los mecanismos generales que permitan el manejo sincronizado de los objetos multimedia (voz, texto, gráficas, imagen, sonido) para dar sentido a la aplicación final. El problema de la sincronización multimedia presenta dos aspectos principales:

- la sincronización intra-objetos. Este aspecto involucra el respeto a la dependencia temporal de los elementos que conforman al objeto. En términos de tráfico en una red, es equivalente al ensamblaje correcto de los paquetes concernientes al objeto.

---

\*CINVESTAV, Av. Lopez Mateos Sur 590 sur 45090 Guadalajara, Jalisco, México.  
Tel: (3) 6.84.15.80, Fax: (3) 6.84.17.08; e-mail rjacinto@gdl.cinvestav.mx



- La sincronización inter-objetos. Este aspecto involucra la sincronización entre los objetos multimedia de la aplicación. En términos de tráfico, es equivalente al manejo de objetos ligados temporalmente, por ejemplo la voz y la imagen en un video.

En este trabajo, proponemos un formalismo que permite la expresión de las dependencias temporales de manera simple y expresiva. En base a este formalismo se propone un mecanismo general de sincronización para tratar con los dos aspectos principales del problema. Este trabajo se basa en reportes previos de otros investigadores [1][3][2] los cuales, sin embargo, presentan un formalismo que resulta pesado de manipular, o bien sólo se enfocan a uno de los dos aspectos del problema. Dentro de este trabajo se presenta un análisis del tratamiento de la sincronización en caso de pérdidas de la información. Este es un problema importante en cuanto a que la pérdida de la información puede ser detectada erróneamente; un tratamiento adecuado es, por lo tanto, básico para un tratamiento adecuado de la sincronización de la información.

## Referencias

- [1] Courtiat, J.P.; Rust da Costa L.F.; Cruz de Oliveira. R. (1996) “A general-purpose multimedia synchronization mechanism based on causal relations”, *IEEE Journals on Selected Areas in Commun.* **14**(1): 185–195.
- [2] Little, T.D.C.; Ghafoor, A. (1990) “Synchronization and storage models for multimedia objects” *IEEE Journals On Selected Areas in Commun.* **8**(3): 413–427.
- [3] Daraine, L. (1994) “Techniques de Synchronisation pour les Communications dans les Systèmes Haut Débit Multimedia”. Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris.

## BENCHMARK SYSTEMS FOR PRODUCT ECO-BALANCE AND ECO-CONTROLLING

MILENA DIDIC \*– U. MAMPEL – M. STREMPFER

---

### Abstract

Nowadays, for practical day to day running of the company alongside the economic considerations, the ecological goals will also play an important role. This causes a new task for the controlling in companies: to observe such goals and to measure them with benchmarks.

Firstly the basics of the known value benchmark in companies will be presented, taking this as the starting-point from the sphere of product Eco-balance and Eco- controlling the benchmark systems is discussed in the contribution. Then, within a company a two level model could contain company internal goal agreements for partly autonomous units, controlled by simple benchmark systems that follow certain strategic goals of the company, covered by more complex benchmark systems.

Finally, the implementation of complex benchmark systems within the company will be discussed using sound mathematical basis and computer support.

**Keywords:** economic benchmarks, ecologic benchmarks.

### Resumen

---

\*Universidad de Costa Rica y Forschungszentrum Karlsruhe, Institute for Applied Informatics P.O. Box 3640, D-76021 Karlsruhe, Germany. Tel. Fax. 0033-4-91225701.

Actualmente, para el diario quehacer de la compañía a través de consideraciones económicas, los fines ecológicos también jugarán un papel importante. Esto implica una nueva tarea de control en las compañías: observar tales metas y medirlas con “benchmarks” (marcadores).

En primer lugar, será presentado lo básico del valor conocido de benchmark en las compañías, tomando esto como el punto de partida de la discusión de esta ponencia, desde la esfera del producto Eco-balance y Eco-control de los sistemas de benchmark. Luego, dentro de una compañía, un modelo de dos niveles puede contener acuerdos y metas internas de la compañía para unidades parcialmente autónomas, controladas por sistemas de benchmark simples que siguen ciertas metas estratégicas de la compañía, cubiertas por sistemas de benchmark más complejos.

Finalmente, será discutida la implementación de sistemas complejos de benchmark dentro de la compañía, usando base matemática sónica y la ayuda de la computadora.

**Palabras clave:** benchmarks económicos, benchmarks ecológicos.

## MÉTODOS MATEMÁTICOS UTILIZADOS EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN GEOGRÁFICA

SILVIA CASAS GONZÁLEZ \*

---

La definición dada por Chuvieco (1990) de un Sistema de Información Geográfica (SIG) es el de una base informatizada de datos con algún componente espacial. Un sistema de información geográfica describe objetos del mundo real en términos de su posición con respecto a:

- a) un sistema de coordenadas,
- b) los atributos que están relacionados con esa posición y
- c) las interrelaciones espaciales entre los objetos (Burrough, 1986).

La necesidad de análisis espacial no se restringe a los que estudian la Geografía, sino que se usa en planeación urbana y agencias de catastro, ingenieros civiles, agrónomos, etc. Los datos en formato digital y geocodificados exigen tratamientos matemáticos que van desde el cálculo de covarianza, los histogramas de frecuencias, hasta los métodos de interpolación lineal. Estos procedimientos incluyen operaciones que transforman las variables originales para un objetivo determinado; por ejemplo, la ruta óptima entre dos puntos, generar el modelo de elevación de un terreno, calcular áreas y perímetros, etc. Con el apoyo de los Sistemas de Información Geográfica las posibilidades de aplicación futuras brindadas por esta tecnología son enormes.

---

\*Unidad de Geomática, Unidad Académica Multidisciplinaria Agronomía y Ciencias, Universidad Autónoma de Tamaulipas, Centro Universitario Victoria, A.P. 337, Cd. Victoria, Tam. México.

## BOUNDS FOR THE NUMBER OF PARTITIONS OF AN INTEGER NUMBER

JUAN BOZA CORDERO \*

---

### 1 Introduction

In [BM], [Bo] partition functions  $p_1, p_2, \dots, p_j \dots$  were introduced and studied to some extent. They behave very much like the well known partition function  $p(n)$ , as is clear specially from results in [Bo]. Here we establish some bounds for the number of partitions, which generalize known results for the classical partition function  $p(n)$ .

### 2 Generating functions

Recall that the generating function of the partition function  $p(n)$ , defined as

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n, \quad (1)$$

satisfies the identity [H, 4.1.20] :

$$\left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( x^{\frac{3k^2-k}{2}} + x^{\frac{3k^2+k}{2}} \right) \right] \cdot \left[ \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n \right] = 1, \quad (2)$$

---

\*CIMPA, Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, 2060 San José, Costa Rica

from which Euler derived his famous recursive formula for computing  $p(n)$  [H, 4.1.21] :

$$p(n) = \sum_{k_1, k_2 \leq n} (-1)^{k-1} (p(n - k_1) + p(n - k_2)), \tag{3}$$

where the numbers  $k_1, k_2$  are defined for  $k \geq 1$  as

$$k_1 = \frac{3k^2 - k}{2}, \quad k_2 = \frac{3k^2 + k}{2},$$

and only nonnegative arguments are allowed at the right side .

For later reference we present here the details of his derivation, the first step consisting in calculating the coefficient of  $x^n$ ,  $n \geq 1$ , in (2) and putting it equal to zero. Two cases arise for  $n$  in this process:

(i) If  $n \neq \frac{3k^2 \pm k}{2}$ , for all  $k \geq 1$ , then the coefficient of  $x^n$  in (2) satisfies:

$$p(n) + \sum_{k_1, k_2 < n} (-1)^k (p(n - k_1) + p(n - k_2)) = 0,$$

from which it follows:

$$p(n) = \sum_{k_1, k_2 < n} (-1)^{k-1} (p(n - k_1) + p(n - k_2)). \tag{4}$$

(ii) If  $n = \frac{3t^2 \pm t}{2}$  for some  $t$ , suppose first  $n = \frac{3t^2 - t}{2}$ . We have, as before:

$$(p(n) + (-1)^t) + \sum_{k_1, k_2 < n} (-1)^k (p(n - k_1) + p(n - k_2)) = 0,$$

and then

$$p(n) = \sum_{k_1, k_2 < n} (-1)^{k-1} (p(n - k_1) + p(n - k_2)) + (-1)^{t-1}.$$

Since  $p(0) = 1$ , we have  $(-1)^{t-1} = (-1)^{t-1} p(0)$ , so that in the preceding formula  $n$  itself can be included as a subindex, leading to:

$$p(n) = \sum_{k_1, k_2 \leq n} (-1)^{k-1} (p(n - k_1) + p(n - k_2)). \tag{5}$$

For the remaining possibility, i.e. if  $n = \frac{3t^2 + t}{2}$ , we have :

$$(p(n) + (-1)^t) + \sum_{k_1, k_2 < n} (-1)^k (p(n - k_1) + p(n - k_2)) + (-1)^t p(n - \frac{3t^2 - t}{2}) = 0,$$

from which

$$p(n) = \sum_{k_1, k_2 < n} (-1)^{k-1} (p(n-k_1) + p(n-k_2)) + (-1)^{t-1} \left[ p\left(n - \frac{3t^2 - t}{2}\right) + 1 \right]$$

and observing again that  $p(0) = 1$ , it follows that:

$$p(n) = \sum_{k_1, k_2 \leq n} (-1)^{k-1} (p(n-k_1) + p(n-k_2)). \quad (6)$$

Putting together the partial results (4), (5), (6) we obtain Euler's recursive formula (3) for calculating  $p(n)$ .

Recall [BM] that for  $j = 1, 2, 3, \dots$ , there exist partition functions  $p_1, p_2, \dots, p_j, \dots$ , so that for  $n \geq 1$ ,  $p_1(n)$  counts the number of partitions of  $n$  with no part equal to 1,  $p_2(n)$  counts the number of partitions of  $n$  with no parts equal to 1 nor to 2, and in general,  $p_j(n)$  counts the number of partitions of  $n$  with no part less than or equal to  $j$ . Proceeding in exactly the same way as just done for  $p$ , we can derive the recursive formulas of [Bo, Th. 5] for the partition functions  $p_1, p_2, \dots$ , but first it is necessary to have their generating functions at disposal. That is our next task.

We begin, as usual, with  $p_1$ . Recall [Ch] that the series (1) defining the generating function of  $p(n)$  converges in the interval  $0 < x < 1$ . For  $n \geq 0$  we have:  $0 < p_1(n) < p(n)$ , from which it follows that the generating function of  $p_1(n)$ , defined as the series

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_1(n)x^n,$$

also converges in the interval  $0 < x < 1$ . For later reference, observe that

$$\begin{aligned} f_1(x) &= p_1(0) + p_1(1)x + p_1(2)x^2 + \dots \\ &= 1 + p_1(2)x^2 + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} p_1(n)x^n. \end{aligned}$$

**Lemma 1** For the generating functions  $f(x)$ ,  $f_1(x)$  of the partition functions  $p(n)$ ,  $p_1(n)$ , respectively, the following relation holds:

$$f_1(x) = (1-x)f(x). \quad (7)$$

**Proof** From [BM, T. 1],

$$p_1(n) = p(n) - p(n - 1), n \geq 2,$$

hence:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} p_1(n)x^n \\ &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} p(n)x^n - \sum_{n=2}^{\infty} p(n-1)x^n \\ &= 1 + (f(x) - 1 - x) - \sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^{n+1} \\ &= f(x) - x - x \sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n \\ &= f(x) - x - x(f(x) - 1) \\ &= (1 - x)f(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

The generating functions of the partition functions  $p_j(n), j \geq 2$ , exhibit a close connection with the generating function of  $p(n)$ , of which Lemma 1 is a particular case. The precise statement follows.

**Theorem 1** Let  $f_j(x), f(x)$  denote the generating functions of  $p_j(n), p(n)$ , respectively. Then the following relation holds true:

$$f_j(x) = (1 - x)(1 - x^2) \cdots (1 - x^j)f(x). \tag{8}$$

**Proof.** Since  $p_j(0) = 1, p_j(1) = p_j(2) = \cdots = p_j(j) = 0$ , the generating function of  $p_j$  is given by

$$f_j(x) = 1 + \sum_{n=j+1}^{\infty} p_j(n)x^n.$$

We make induction on  $j$ . The case  $j = 1$  is Lemma 1.

For the inductive step, assume the conclusion holds true for  $p_{j-1}(n)$ . From the relation [BM, T. 2]

$$p_j(n) = p_{j-1}(n) - p_{j-1}(n - j), n \geq j \geq 1, p_{j-1}(1) = 1,$$



one has:

$$\begin{aligned}
 f_j(x) &= 1 + \sum_{n=j+1}^{\infty} p_j(n)x^n \\
 &= 1 + \sum_{n=j+1}^{\infty} p_{j-1}(n)x^n - \sum_{n=j+1}^{\infty} p_{j-1}(n-j)x^n \\
 &= 1 + \sum_{n=j}^{\infty} p_{j-1}(n)x^n - p_{j-1}(j)x^j - \sum_{n=1}^{\infty} p_{j-1}(n)x^{n+j} \\
 &= \left(1 + \sum_{n=j}^{\infty} p_{j-1}(n)x^n\right) - p_{j-1}(j)x^j - x^j \sum_{n=1}^{\infty} p_{j-1}(n)x^n \\
 &= f_{j-1}(x) - x^j - x^j(f_{j-1}(x) - 1) \\
 &= (1 - x^j)f_{j-1}(x) \\
 &= (1 - x)(1 - x^2) \cdots (1 - x^{j-1})(1 - x^j)f(x). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Under a similar remark as the one made above for  $p_1(n)$ , it is clear that the series  $f_j(x)$  converges for  $0 < x < 1$ .

The precise formula for the generating functions of the  $p_j$ 's just stated can also be established in a somewhat heuristic way, which is more conceptual than the argumentation in the proof of Theorem 1. It follows ideas from [Ri], used there for some classical partition functions. To see how it works, consider the case  $j = 1$ . Since  $p_1(n)$  counts the number of partitions of  $n$  with no part equal to 1, its generating function is given by

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= (1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + \cdots) \cdots \\
 &= \frac{f(x)}{1 + x + x^2 + \cdots} = \frac{f(x)}{(1 - x)^{-1}} = (1 - x)f(x).
 \end{aligned}$$

To continue one step more, recall that  $p_2(n)$  counts the number of partitions of  $n$  with no 1's nor 2's, hence

$$\begin{aligned}
 f_2(x) &= (1 + x^3 + x^6 + \cdots)(1 + x^4 + x^8 + \cdots) \cdots \\
 &= \frac{f(x)}{(1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)} \\
 &= \frac{f(x)}{(1 - x)^{-1}(1 - x^2)^{-1}} \\
 &= (1 - x)(1 - x^2)f(x).
 \end{aligned}$$

It should be clear at this point how to proceed in the general case, which we omit.

Expression (10) for the generating function  $f_j(x)$  can be applied as announced, to obtain the recursive formula [Bo, Th. 5] for computing  $p_j(n)$ . To that end, replace the expression

$$f(x) = \frac{f_j(x)}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^j)}$$

in the identity (2), to obtain:

$$\begin{aligned} & \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (x^{\frac{3k^2-k}{2}} + x^{\frac{3k^2+k}{2}}) \right] \cdot \left[ 1 + \sum_{n=j+1}^{\infty} p_j(n)x^n \right] \\ = & (1-x)(1-x^2)\dots(1-x^j). \end{aligned} \tag{9}$$

The next step is to equate the coefficients of  $x^n$  at both sides of (9). We don't work for general  $j$ , but develop one specific case in the next example.

**Example** We will compute  $p_2(n)$  for some small values of  $n$ , using (9):

$$\begin{aligned} & [1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - \dots] \cdot [1 + p_2(3)x^3 + p_2(4)x^4 + \dots] \\ = & (1-x)(1-x^2) = 1 - x - x^2 + x^3. \end{aligned} \tag{10}$$

Equating the coefficients of  $x^n$ ,  $n = 0, 1, 2$ , at the left side of (10) to 1,  $-1$  and  $-1$ , respectively, gives no useful information. For  $n = 3$ , the process gives:  $p_2(3) = 1$ , the initial condition for computing  $p_2(n)$  recursively. For  $n \geq 4$ , we write the corresponding coefficient equal to zero to obtain  $p(n)$ :

$$\begin{aligned} p_2(4) - p_2(3) &= 0, & p_2(4) &= p_2(3) = 1; \\ p_2(5) - p_2(4) - p_2(3) + 1 &= 0, & p_2(5) &= p_2(4) + p_2(3) - 1 = 1; \\ p_2(6) - p_2(5) - p_2(4) &= 0, & p_2(6) &= p_2(5) + p_2(4) = 2; \\ p_2(7) - p_2(6) - p_2(5) + 1 &= 0, & p_2(7) &= p_2(6) + p_2(5) - 1 = 2; \\ p_2(8) - p_2(7) - p_2(6) + p_2(3) &= 0, & p_2(8) &= p_2(7) + p_2(6) - p_2(3) = 3. \end{aligned}$$

From the above one can proceed with the general case.

### 3 Bounds for the partition functions

We make a study of the functions  $p_j(n)$  that is close to the one done for  $p(n)$  in [Ch] and in [v. L]. From Theorem 1, we can write, for  $0 < x < 1$ ,

$$\begin{aligned} f_j(x) &= (1-x)(1-x^2)\dots(1-x^j)f(x) \\ &= (1-x)(1-x^2)\dots(1-x^j) \prod_{k=1}^{\infty} (1-x^k)^{-1} \\ &= \prod_{k=j+1}^{\infty} (1-x^k)^{-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Let

$$g_j(x) = \log f_j(x) = \log \prod_{k=j+1}^{\infty} (1-x^k)^{-1}, \quad (12)$$

then we have:

$$\begin{aligned} g_j(x) &= \sum_{k=j+1}^{\infty} (-\log(1-x^k)) \\ &= \sum_{k=j+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{kn}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=j+1}^{\infty} (x^n)^k \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{n(j+1)} \sum_{k=j+1}^{\infty} (x^n)^{k-j-1} \end{aligned} \quad (13)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{n(j+1)} \sum_{k=0}^{\infty} x^{nk} \quad (14)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(x^n)^{j+1}}{1-x^n}. \quad (15)$$

Recall that

$$\frac{1-x^n}{1-x} = 1+x+x^2+\dots+x^{n-1},$$

so that for  $0 < x < 1$ , one has:

$$nx^{n-1} < \frac{1-x^n}{1-x} < n,$$

that is,

$$\frac{1}{n} < \frac{1-x}{1-x^n} < \frac{1}{nx^{n-1}}.$$

Multiplying all the terms above by  $\frac{x^{n(j+1)}}{nx^{j+1}}$ , leads to:

$$\frac{(x^{j+1})^{n-1}}{n^2} < \frac{1-x}{x^{j+1}} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{(x^n)^{j+1}}{1-x^n} < \frac{(x^j)^{n-1}}{n^2},$$

and from this to:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^{j+1})^{n-1}}{n^2} < \frac{1-x}{x^{j+1}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{(x^n)^{j+1}}{1-x^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^j)^{n-1}}{n^2}.$$

Since  $0 < x^j < 1$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^j)^{n-1}}{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

and then

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^{j+1})^{n-1}}{n^2} < \frac{1-x}{x^{j+1}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{(x^n)^{j+1}}{1-x^n} < \frac{\pi^2}{6},$$

that is,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^{j+1})^{n-1}}{n^2} < \frac{1-x}{x^{j+1}} \cdot g_j(x) < \frac{\pi^2}{6}.$$

Letting  $x \rightarrow 1^-$ , we finally obtain:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left[ \frac{1-x}{x^{j+1}} \log f_j(x) \right] = \frac{\pi^2}{6}. \tag{16}$$

We have for  $0 < x < 1$  :

$$f_j(x) > p_j(n)x^n, \tag{17}$$

from which it follows:

$$\log p_j(n) + n \log x < \log f_j(x) < \frac{\pi^2}{6} \frac{x^{j+1}}{1-x}.$$

Substitute  $x = (1+u)^{-1}$ ,  $0 < u < \infty$ . Then we have:

$$\begin{aligned} \log p_j(n) &< \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{u(u+1)^j} + n \log(u+1) \\ &< \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{u(u+1)^j} + nu \\ &< \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{u^{j+1}} + nu. \end{aligned} \tag{17}$$

From the inequality (17), consider the function

$$\varphi_j(u) = \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{u^{j+1}} + nu \quad , \quad 0 < u < \infty.$$

Its derivative is:

$$\varphi_j'(u) = -\frac{\pi^2(j+1)}{6} u^{-(j+2)} + n,$$

and it vanishes at

$$u_0^{(j)} = \left( \frac{\pi^2(j+1)}{6n} \right)^{\frac{1}{j+2}}.$$

It is easily seen that  $\varphi_j''(u_0^{(j)}) > 0$ , so that  $\varphi$  attains a minimum at  $u_0^{(j)}$ , given by

$$\varphi_j(u_0^{(j)}) = \frac{\pi^2(j+2)}{6^{\frac{1}{j+2}} [\pi^2(j+1)]^{\frac{j+1}{j+2}}} n^{\frac{j+1}{j+2}}.$$

Put

$$K_j = \frac{\pi^2(j+2)}{6^{\frac{1}{j+2}} [\pi^2(j+1)]^{\frac{j+1}{j+2}}}. \quad (18)$$

From  $\log p_j(n) < \varphi_j(u)$ , it follows that  $\log p_j(n) < K_j n^{\frac{j+1}{j+2}}$ , from which the following upper bound for the value  $p_j(n)$  is an easy consequence.

### Theorem 2

$$p_j(n) < e^{K_j n^{\frac{j+1}{j+2}}}. \quad \blacksquare \quad (19)$$

Under the natural convention:  $p = p_0$ , for  $j = 0$  in (18), one has:  $K_0 = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ . Using the inequality (19), one obtains in particular:

$$p(n) < e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}}n}, \quad (20)$$

the well-known inequality for the partition function  $p(n)$  [Ch].

## Referencias

- [A] Andrews, G. E. (1976) *The Theory of Partitions*, Addison-Wesley, Mass.  
 [Ap] Apostol, T. (1980) *Introducción a la teoría analítica de números*. Reverté, Barcelona.

- [B] Berge, C. (1971) *Principles of Combinatorics*. Academic Press, N. Y.
- [BM] Boza, J., Murillo, A. (1995) *Una nueva manera de contar particiones*, X Simposio Mat. Apl., Turrialba.
- [Bo] Boza, J., (1997) *Recursive Formulas for Partition Functions*, Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones, San José, vol. 4, no. 1.
- [Ch] Chandrasekharan, K. (1970) *Arithmetical Functions*. Springer, New York.
- [D] Dickson, L. E. (1971) *History of the Theory of Numbers*, Chelsea, N. Y.
- [H] Hall, M. Jr. (1967) *Combinatorial Theory*, Blaisdell, Waltham, Mass.
- [R] Rademacher, H. (1973) *Topics in Analytic Number Theory*. Springer, New York.
- [Ri] Riordan J. (1958) *An Introduction to Combinatorial Analysis*, Wiley, New York.
- [v. L] van Lint, J. (1974) *Combinatorial Theory Seminar Eindhoven...*, Springer-Verlag, LNM, # 382.

## INDIFERENCIA Y MEDIDA

MARÍA ISABEL ASHAW \*

---

### Resumen

En esta conferencia presentaremos una relación entre la teoría de grafos y la teoría de funciones lo cual nos permite caracterizar una clase especial de grafos: los llamados grafos de indiferencia.

### 1 Introducción

En primer lugar desarrollaremos la noción de indiferencia. Se hace un intento por formular matemáticamente la noción de indiferencia en términos de una relación de equivalencia. Paralelamente se discute la idea contraria de preferencia. Descrita la caracterización, se presentan ejemplos sobre grafos de indiferencia, en particular, se presentan en detalle la prueba de que  $Z_4$  no es un grafo de indiferencia, resultado generalizado para  $Z_n$ ,  $n \geq 4$ . A continuación se prueba el carácter hereditario de la propiedad de indiferencia para los grafos, esto es, que si  $G$  es un grafo de indiferencia entonces todos sus subgrafos generados también lo son. Finalmente, se presenta una caracterización de los grafos de indiferencia, la cual consiste en mostrar qué subgrafos generados no pueden pertenecer al grafo  $G$ . Una segunda caracterización es presentada en términos de la noción de vértices extremos y grafos cocientes.

---

\*Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Naturales y Exactas, Universidad de Panamá, Estafeta Universitaria, Panamá, República de Panamá; Tel. +(507) 263 4841, Fax: +(507) 263 7636; e-mail: [esemat@ancon.up.ac.pa](mailto:esemat@ancon.up.ac.pa)

## 2 Grafos de indiferencia

Muchas decisiones que deben ser tomadas por individuos, grupos o por la sociedad en conjunto requieren de la habilidad para medir variables, las cuales no son tan fáciles de medir como lo son las variables físicas masa, temperatura, velocidad, etc. La necesidad de medir o cuantificar aspectos como preferencia, acuerdos, estética, ha dado lugar al surgimiento de una teoría de la medida la cual cubre variables sociales tanto como las variables físicas. Una de las metas es organizar la información en estructuras coherentes de modo tal que las propiedades subyacentes puedan ser identificadas. Las técnicas de medidas y escalas son utilizadas a menudo en las formas anteriormente descritas en las ciencias sociales, en particular, al intentar entender opiniones, puntos de vista, etc. Las escalas resultantes tienen usos en una amplia gama de decisiones a ser tomadas por individuos, grupos sociales o sociedades. En el presente trabajo discutiremos el uso de las herramientas teórico-gráficas en un problema de medidas, a saber: la medida de la inferencia.

Supongamos que un individuo expresa su preferencia entre un conjunto de alternativas  $V$ . Escribiremos  $xPy$  para indicar que entre los objetos  $x$  e  $y$  se prefiere al objeto  $x$ . Si un individuo no está obligado a escoger entre  $x$  e  $y$ , se dice que le es indiferente. Esto es: un individuo es indiferente ante las alternativas  $x$  e  $y$  si  $y$  sólo si él no prefiere a  $x$  ni prefiere a  $y$ .

Escribiremos  $xIy$  para indicar que un individuo es indiferente a las alternativas  $x$  e  $y$ . La medida de preferencia corresponde a la asignación de números los cuales preservan el grado de preferencias expresados. En particular, la meta es asignar un número real  $f(x)$  a cada  $x$  en  $V$  de tal manera que para cada  $x, y$  en  $V$ :

$$xPy \Leftrightarrow f(x) > f(y).$$

Lo anterior significa que se prefiere a  $x$  en lugar de  $y$  si y sólo si a  $x$  se le asigna un valor más grande que el valor asignado a  $y$ . Si es posible obtener una tal función  $f$ , entonces la indiferencia corresponde a la igualdad

$$xIy \Leftrightarrow f(x) = f(y) \tag{1}$$

Probaremos a continuación que 1 define una relación de equivalencia en el conjunto  $V$ . En efecto: Las propiedades reflexiva, simétrica y transitivas son inmediatas ya que la igualdad es una relación que satisface dichas propiedades. No obstante todo lo anterior, el economista Armstrong estuvo



entre los primeros en refutar la transitividad de la indiferencia. Menger afirma que tales refutaciones se remontan al tiempo de Poincaré. Una refutación de la transitividad de la indiferencia debida a Luce, aparecida en 1956, es el presente argumento: “De seguro ninguna persona se mostrará indiferente ante dos tazas de café una de las cuales no contiene azúcar y la otra con cinco cucharaditas de azúcar. Sin embargo, si añadimos azúcar a la primera taza grano a grano definitivamente cualquier persona sería indiferente ante dos tazas consecutivas. Si la transitividad fuera cierta entonces tendríamos que aceptar que somos indiferentes entre la taza sin azúcar y la taza con cinco cucharaditas de azúcar.” Ejemplos como el anterior nos sugieren que la indiferencia no corresponde a una igualdad sino más bien a proximidad. Más precisamente, supongamos que  $\delta$  es un número real positivo que mide la proximidad. Entonces nos interesa una asignación de números  $f(x)$  a los elementos de  $V$  de tal manera que para elementos arbitrarios  $x, y \in V$ ,

$$xIy \Leftrightarrow |f(x) - f(y)| < \delta \quad (2)$$

Ahora nos preguntaremos, ¿bajo qué circunstancias puede existir una asignación de valores? La respuesta a esta pregunta es de vital importancia en mediciones, porque dicha respuesta nos dice cuando se puede realizar una medición o tabulación de la información (criterios de indiferencia). Para responder a esta pregunta, transformamos el problema en un problema de grafos. Sea  $V$  el conjunto de vértices de un grafo  $G$ , entonces se construye una arista entre  $x$  e  $y$  si y sólo si  $x$  es indiferente a  $y$ . De esta manera el grafo resultante tendrá lazos en cada vértice. En lo que sigue en nuestro trabajo los grafos que consideraremos tendrán lazos en cada vértice. Nos interesa asignar un número  $f(x)$  a cada vértice  $x$  del grafo  $G$  de tal manera que vértices unidos por una arista están asociados a números próximos entre sí y vértices no adyacentes quedan asociados a números no tan próximos entre sí. Si existe una tal asignación de números diremos que  $G$  es un grafo de indiferencia. Es fácil dar ejemplos de grafos de indiferencia. Consideremos, por ejemplo el grafo siguiente:

Sea  $\delta = 1$ ,  $V = \{a, b, c, d, e\}$  y  $G$  el grafo descrito en la figura 1.

$G$  es un grafo de indiferencia ya que para  $\delta = 1$  podemos definir a  $f$  como sigue:

$$f(a) = 0, f(b) = 0.3, f(c) = 0.7, f(d) = 1.1 \text{ y } f(e) = 1.4.$$

Demostraremos a continuación que si para  $\delta = 1$  existe una asignación de valores que cumple la desigualdad 2, entonces existe una asignación asociada

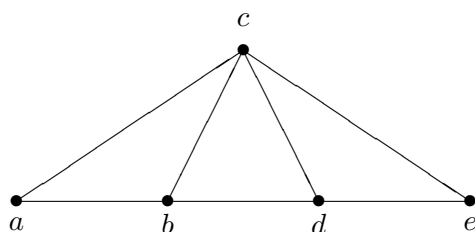


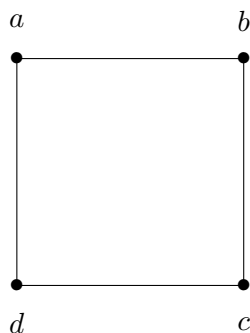
Figura 1: Un grafo de indiferencia.

a cada  $\delta$  positivo. En efecto: supongamos que para  $xIy$  existe  $f$  tal que

$$|f(x) - f(y)| < \delta,$$

entonces definiendo  $f^*(x) = \delta f(x)$ ,  $\forall x \in V$  se cumple que:

$$|f^*(x) - f^*(y)| = \delta |f(x) - f(y)| < \delta.$$

Figura 2: El grafo  $Z_4$ .

A continuación describiremos un grafo que no es de indiferencia: consideremos al grafo  $Z_4$  con la etiquetación de vértices dada en la figura 2. Si existiera una función  $f$  que satisficiera la relación 2 entonces, sin pérdida de generalidad, se puede definir que  $f(b) \geq f(a)$ . Como  $a$  y  $b$  son adyacentes, y similarmente  $b$  y  $c$ , entonces los números  $f(a)$  y  $f(b)$  difieren entre sí a lo sumo en un valor  $\delta$  y de igual manera  $f(b)$  y  $f(c)$ . Sin embargo, como  $a$  y  $c$  no son adyacentes entonces  $f(a)$  y  $f(c)$  distan entre sí en por lo menos  $\delta$  unidades lo cual nos conduce a una contradicción.

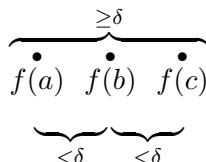


Figura 3: El argumento de que  $Z_4$  no es un grafo de indiferencia.

$f(b)$  debe localizarse a una distancia menor que  $\delta$  de ambos  $f(a)$  y  $f(c)$ , como se ilustra en la figura 3. Finalmente,  $f(d)$  debe localizarse en la recta real a una distancia menor que  $\delta$  de ambos  $f(a)$  y  $f(c)$  y simultáneamente a una distancia mayor que  $\delta$  de  $f(b)$ , lo cual es imposible. Así pues no existe una tal función  $f$  asociada a  $Z_4$ . Por lo tanto,  $Z_4$  no es un grafo de indiferencia.

Es fácil probar que  $Z_n$ ,  $n \geq 4$  no es un grafo de indiferencia considerando los grafos siguientes:

$$J(a) = \left( f(a) - \frac{\delta}{2}, f(a) + \frac{\delta}{2} \right).$$

Entonces si  $f$  es una función que satisface 2 tendremos lo siguiente:

$$xIy \leftrightarrow J(x) \cap J(y) \neq \phi. \quad (3)$$

Por lo anterior, se deduce que todo grafo de indiferencia es un grafo intervalo (diremos que  $G$  es un grafo intervalo si es el grafo intersección de una familia de intervalos abiertos de la misma longitud).

Los grafos de indiferencia son exactamente los grafos intervalos unitarios. En particular, los grafos de indiferencia no pueden ser  $Z_n$ ,  $n \geq 4$  o tener a  $Z_n$  como un grafo generado.

En la figura 4 presentamos dos grafos que no son de indiferencia.

Consideremos el grafo de la figura 5. No todo grafo intervalo es un grafo de indiferencia. Supongamos que existe una función  $f$  que satisface 2, sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $f(a) < f(b) < f(c)$ . Como no hay aristas entre  $a, b$  y  $c$  tenemos que  $f(a)$  y  $f(c)$  deben estar separados por una distancia como mínimo igual a  $2\delta$ . Sin embargo,  $f(d)$  debe localizarse a lo sumo a una distancia  $\delta$  de ambos  $f(a)$  y  $f(c)$ , lo cual es imposible. Por lo tanto el grafo intervalo (figura 5) no es un grafo de indiferencia. Es fácil mostrar que si  $G$  es un grafo de indiferencia entonces también lo es cada subgrafo generado por  $G$ .

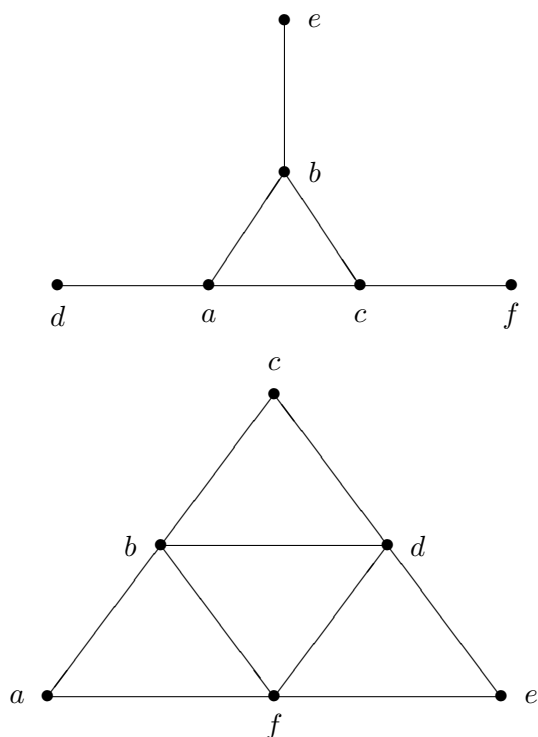


Figura 4: Grafos que no son de indiferencia.

**Teorema 1:** Un grafo  $G$  (con lazos en cada vértice) es un grafo de indiferencia si y sólo si es un grafo de circuito rígido, y ninguno de los grafos de las figuras 4 y 5 es subgrafo generados de  $G$ .

El teorema anterior es un ejemplo de una caracterización de subgrafos que no son permitidos, en particular este teorema caracteriza una clase especial de grafos indicando las configuraciones que no pueden aparecer como subgrafos generados.

Para ganar un poco de profundidad en el estudio de los grafos de indiferencia definamos una relación  $\approx$  sobre el conjunto de los vértices de un grafo indicando  $x \approx y$  si y sólo si  $x$  e  $y$  están unidos exactamente al mismo conjunto de vértices. En particular, si el grafo de la figura 5 es considerado como un grafo sin lazos, entonces  $a \approx b$ . Sin embargo, si nosotros consideramos a este como un grafo con lazos en cada vértice, entonces este no es el caso de que  $a \approx b$ , puesto que  $a$  está unido a  $a$  por una arista mientras

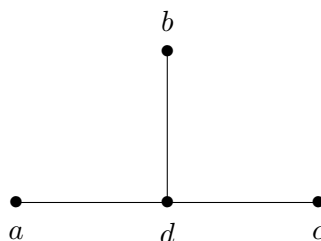


Figura 5: Un grafo intervalo que no es de indiferencia.

que  $b$  no está unido a  $a$ . En grafos con lazos en cada vértice,  $x \approx y$  implica que existe una arista entre  $x$  e  $y$ . Es fácil mostrar que  $\approx$  es una relación de equivalencia. Se puede definir un nuevo grafo  $G/\approx$  como sigue. Los vértices serán las clases de equivalencia bajo la relación  $\approx$ , y la clase de equivalencia que contiene a  $x$  será adyacente a  $y$  si y sólo si  $x$  es adyacente a  $y$  en  $G$ . Este nuevo grafo está bien definido y se dice que  $G$  es *reducido* si  $G$  es isomorfo a  $G/\approx$ . Se usarán las nociones de equivalencia y reducción para dar otra caracterización de los grafos de indiferencia. Consideremos un conjunto finito de puntos sobre la recta real. Deben haber dos puntos extremos. Trataremos de capturar, a través de la siguiente definición, los vértices de un grafo que pueden ser puestos en correspondencia con puntos extremos a través de una función que satisface 2. Diremos que el vértice  $x$  de un grafo  $G$  es un vértice extremal si cada vez que hay aristas de  $x$  a  $y$  y de  $x$  a  $z$ , entonces  $y$  y  $z$  tienen que ser también adyacentes. Más aún, existe un vértice  $w$  tal que  $y$  y  $z$  son adyacentes con  $w$  pero  $x$  no es adyacente con  $w$ . En el grafo de la figura 4(ii) el vértice es un vértice extremal, porque el único par de vértices a los cuales está unido son  $b$  y  $f$ ,  $b$  y  $f$  son adyacentes entre sí y hay un vértice  $d$  adyacente a  $b$  y a  $f$  el cual no es adyacente con  $a$ . Similarmente  $c$  y  $e$  son vértices extremos. En el grafo de la figura 4(i) los vértices etiquetados con  $d$ ,  $e$  y  $f$  de manera tácita o vacía.

En el grafo de la figura 5 los vértices  $a$ ,  $b$ , y  $c$  también son extremos. Sin embargo, en los grafos  $Z_n$ ,  $n \geq 4$ , no hay vértices extremos, ya que cada vértice está unido a otros dos los cuales no son adyacentes.

**Teorema 2** (Roberts 1969a): Un grafo  $G$  con lazos en cada vértice es un grafo de indiferencia si y sólo si para cada subgrafo generado conexo  $H$  de  $G$ , o bien  $H/\approx$  contiene un solo elemento o tiene exactamente dos vértices extremos.

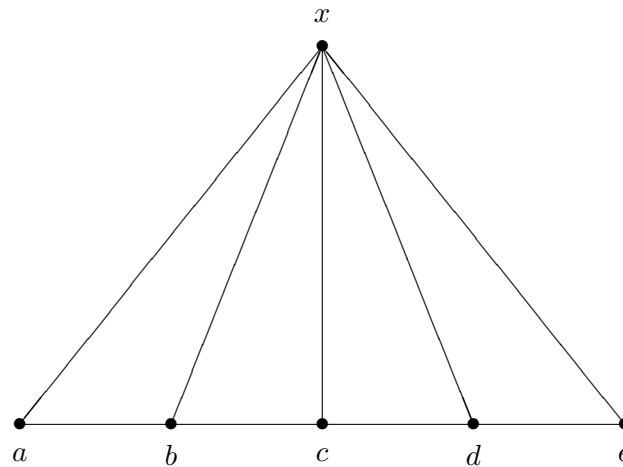


Figura 6: Un grafo conexo y reducido que no es de indiferencia.

Este teorema explica por qué los grafos  $Z_n$ ,  $n \geq 4$  y los grafos de las figuras 4 y 5 no son grafos de indiferencia. Si cada uno de estos grafos es considerado como un grafo con lazos en cada vértice, entonces cada uno de ellos es conexo y reducido, y cada uno de ellos tiene o muy pocos o demasiados vértices extremales. Es necesario trabajar la reducción, porque si hubieran vértices equivalentes entonces un grafo de indiferencia conexo podría tener menos de dos vértices extremales si nuestra presente definición de vértice extremal se usara. Considérese por ejemplo al grafo completo con tres vértices. Por otro lado, no es suficiente enunciar el teorema dos en términos de sus componentes conexas. El grafo de la figura 6 muestra por qué. Él es conexo y reducido y tiene solamente dos vértices extremales  $a$  y  $e$ . Sin embargo, el subgrafo generado por los vértices  $x, a, c$  y  $e$  es conexo y reducido, y tiene tres vértices extremales  $(a, c, e)$ . Este grafo es isomorfo al grafo de la figura 5.

## Referencias

- [1] Harary, F. (1969) *Graph Theory*. Addison Wesley, Reading, Mass.
- [2] Roberts, F. S. (1978) *Graph Theory and Its Applications to Problems of Society*. SIAM, Philadelphia.

- [3] White, A. T. (1984) *Graphs, Groups and Surfaces*, Revised Edition. North Holland, Amsterdam.
- [4] Wilson, R.; Watkins, J. (1990) *An Introductory Approach Graphs*. John Wiley & Sons, New York.

## UNA INTRODUCCIÓN A LOS FRACTALES

MANUEL MURILLO TSIJLI \* – ALBERTO SOTO AGUILAR\*

---

### Resumen

En este Minicurso se pretende introducir, con un nivel intermedio, el tema de los fractales. Nos interesa rescatar el desarrollo matemático: topología, teoría de la medida y geometría, sin olvidar la parte visual y las hermosas imágenes generadas por computadora que tienen estos conjuntos.

**Palabras clave:** Fractal, atractor, sistema iterado de funciones, dimensión, bases.

## 1 Introducción

Los fractales constituyen un tema matemático de actualidad y se han convertido en algo muy popular en los últimos años. Típicamente un fractal es algo irregular, pero lo más importante es que si lo ampliamos arbitrariamente, él aún sigue irregular. Para nosotros, los fractales serán en general figuras geométricas que se caracterizan por su autosemejanza sin embargo existen otros, como la frontera del conjunto de Mandelbrot, que son fractales no autosemejantes. Son estructuras infinitas contenidas en una superficie finita y resultan de utilidad en el análisis de una gran diversidad de fenómenos como turbulencias, bolsa de valores, dispersión del humo, etc., además de

---

\*Escuela de Matemáticas, Instituto Tecnológico de Costa Rica, Cartago, Costa Rica



sintetizar imágenes como montañas, nubes, costas rocosas, ríos y plantas entre otras.

Las figuras fractales se obtienen de repetir una y otra vez el mismo procedimiento, en forma recursiva o bien iterada.

La exposición está dividida en cuatro temas. En el primer tema se introducen los sistemas iterados de funciones y se muestran algunos ejemplos de sus atractores como el conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpiński y el dragón de Heighway, y se define la dimensión de semejanza. También formaliza propiedades de estos conjuntos y detalles importantes.

En el segundo tema se representan números complejos usando bases complejas, se discute sobre “buenas” bases y “malas” bases. Se obtienen las figuras de conjuntos de fracciones de números representables en estas bases y se describen propiedades topológicas de ellos.

En el tercer tema se define las dimensiones topológica y Hausdorff, cuando la dimensión topológica es menor se define un fractal en el sentido original de Mandelbrot. Se trabaja con ejemplos de cómo calcular las dimensiones involucradas. Se exhiben otros tipos de dimensión fractal y se notan las similitudes que hay entre ellas.

En el cuarto tema se presentan algunas aplicaciones.

## 2 Contenido

### 1. Autosemejanza

- (a) Sistemas iterados de funciones
- (b) Métrica Hausdorff
- (c) Atractores para sistemas iterados de funciones (Los conjuntos de Cantor, triángulo de Sierpiński, Dragón de Heighway)

### 2. Sistemas de Numeración

- (a) Bases para Números Reales
- (b) Bases para Números Complejos
- (c) Representación de los enteros Gaussianos
- (d) Ejemplos de conjuntos de fracciones (Fracciones de Eisenstein, el conjunto de Cantor y el triángulo de Sierpiński)

### 3. Dimensión Hausdorff

- (a) Dimensión topológica
  - (b) Medida Hausdorff
  - (c) Dimensión de semejanza vs dimensión Hausdorff
  - (d) Otras dimensiones fractales
4. Aplicaciones
- (a) Los dilemas espaciales de evolución (Dilema del Prisionero).
  - (b) Compresión de Imágenes
  - (c) Programas Computacionales

## Referencias

- [1] Alfaro, M.; Murillo, M.; Soto A. (1997) *Tesis de Licenciatura*. Universidad de Costa Rica, San José.
- [2] Edgar, G. A. (1990) *Measure, Topology, and Fractal Geometry*. Springer-Verlag, New York.
- [3] Falconer, K. (1990) *Fractal Geometry*, John Wiley & Sons, England.
- [4] Fisher, Y. (1994) *Fractal Image Compression*. Springer-Verlag, New York.
- [5] Murillo T., M.; Soto A., A. (1996) “Sobre los Conjuntos de Cantor”. Memorias del *IV ECADIM*, Antigua, Guatemala, (por aparecer).
- [6] Murillo T., M.; Soto A., A. (1997) “Sobre bases complejas y dragones”, Memorias del *V ECADIM*, J. Trejos (ed.), Liberia, Costa Rica: 230–235.
- [7] Peitgen, H.-O.; Saupe, D. & Jürgens, H. (1992) *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*, Springer-Verlag, New York.
- [8] Soto A. (1997) “El fascinante triángulo de Sierpiński”, Memorias del *V ECADIM*, J. Trejos (ed.), Liberia, Costa Rica: 263–270.

DISEÑO DEL TEMA “PRUEBAS NO  
PARAMÉTRICAS” CORRESPONDIENTE A LA  
ASIGNATURA ESTADÍSTICA Y DISEÑO DE  
EXPERIMENTOS EN INGENIERÍA CIVIL

CARLOS ALBERTO GARCÍA FERNÁNDEZ \*

---

**Resumen**

Este tema tiene importancia por la introducción de un contenido no tratado en los planes de estudio anteriores de la especialidad de Ingeniería Civil. Debe destacarse también que la asignatura *Estadística y Diseño de Experimentos* es la que cierra la disciplina Matemática. Como precedente en el trabajo de conceptos estadísticos está la primera asignatura de la disciplina (*Elementos básicos para la Ingeniería*) en la cual se abordan una serie de conceptos necesarios para el desarrollo de la asignatura. Los contenidos que se introducen por primera vez en la currícula del ingeniero Civil son los referidos a la comparación de dos poblaciones por medio de las *Pruebas Paramétricas y no Paramétricas*. Aquí también se aborda la componente probabilística de la Teoría de la Seguridad.

**Palabras clave:** métodos de enseñanza pruebas de hipótesis, teoría de la seguridad.

---

\*Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería Civil, ISPJAE, La Habana, Cuba.

## 1 Introducción

La disciplina de Matemática de la especialidad de Ingeniería Civil está concebida de acuerdo al modelo del profesional planteado en el plan de estudios y se plantea que el problema profesional fundamental que tiene ante sí la Matemática está viculado al desarrollo del pensamiento lógico y sistemático del ingeniero y desarrollar sus capacidades de pensamiento abstracto, lo cual sirve de base para el logro de los restantes modos de actuación o problemas profesionales que debe resolver el futuro Ingeniero Civil.

El plan de estudio C de la especialidad de Ingeniería Civil parte de una concepción basada en el *Enfoque Histórico-Cultural* a partir de un grupo de requisitos planteados donde predomina el desarrollo integral de la personalidad del futuro ingeniero; está concebido al aprendizaje como una actividad de producción y reproducción del conocimiento a partir de la estructura de cada semestre con una asignatura principal integradora (de la especialidad) con la cual se articulan horizontalmente un grupo de asignaturas. El esquema de trabajo planteado en cada semestre permite realizar las acciones para hacer más activo el proceso de aprendizaje y conocimiento del estudiante, el cual transurre como parte de una colaboración entre el alumno y el profesor en la actividad conjunta que ellos realizan. En este plan de estudio el concepto de aprendizaje empleado pone en el centro de atención al alumno (sujeto) activo, consciente, orientado hacia un objetivo, su interacción con otros sujetos (el profesor y otros estudiantes, obreros del sector constructivo).

En lo referente a los objetivos planteados en el programa de la disciplina consideramos que no todos están planteados de acuerdo a las acciones de los estudiantes. Se ha comenzado a trabajar en esta dirección para lograr una formulación de los mismos de acuerdo a los elementos fundamentales para la formulación de los objetivos:

- deben plantearse en términos de tareas o acción concreta a resolver por los estudiantes.
- deben ser comprensibles, de redacción clara y precisa.
- viables-alcanzables.
- evaluables; deben expresar los parámetros que permitan evaluar la acción de forma cualitativa.

## 2 Desarrollo

A continuación planteamos la propuesta correspondiente a la estructuración didáctica del tema seleccionado. En esta propuesta tratamos de plantearnos una organización del proceso de asimilación garantizando las tres componentes funcionales: la parte orientadora, la ejecutora y la de control.

### Conferencia #1 del tema:

*Las funciones de distribución de probabilidad de uso más frecuente en la Ingeniería Civil.*

### Sumario:

1. Conceptos preliminares.
2. Distribución normal.
3. Distribución  $\chi^2$  (Ji-cuadrado).
4. Distribución  $t$ -Student.
5. Distribución  $F$ -Fisher.

### Objetivos

1. Reactivar los conceptos de variable aleatoria (discreta y continua), función de densidad de probabilidades, función de distribución de probabilidades, estadígrafos de posición y de dispersión.
2. Familiarizar al estudiante con las tablas estadísticas por medio del libro de tablas estadísticas.

Se usará como método fundamental el expositivo dado el carácter de introducción al tema que tiene esta clase, aunque se trabajará la elaboración conjunta en la manipulación de la tabla. Como medios de enseñanza se plantea el uso del pizarrón y del libro de tablas estadísticas de Aida Rodríguez, esta último medio es importante en el desarrollo de esta clase.

Como estudio independiente se plantea confeccionar una tarjeta de estudio, por ejemplo:

Completar la tabla con los valores de probabilidad que correspondan:

	$x \sim N(3, 7)$	$x \sim \chi^2(7)$	$x \sim t(4)$
$p(1.7 < x < 8.6)$			
$p(x > 4.6)$			
$p(x < 2.8)$			

Determinar el valor del parámetro  $k$  de acuerdo a:

	$x \sim N(3, 7)$	$x \sim \chi^2(7)$	$x \sim t(4)$
$p(k < x < 5.3) = 0.8719$			
$p(2.5 < x < k) = 0.7651$			
$p(x < k) = 0.5348$			

### Conferencia #2 del tema:

*Las Teoría de Seguridad en el diseño de cimentaciones.*

#### Sumario:

1. Conceptos básicos.
2. La Teoría de la Seguridad en el diseño de cimentaciones.
3. Ejemplo de aplicación.

#### Objetivos

1. Plantear el problema del diseño de cimentaciones por el método de la Teoría de la Seguridad.
2. Conocer la diferencia entre este método de diseño por Estados Límites.
3. Reconocer las ventajas del diseño por el método de la Teoría de la Seguridad.

En el desarrollo de esta conferencia debe predominar la exposición del profesor y sería provechoso que participara en ella un profesor de la especialidad, se debe procurar la participación de los estudiantes en la comparación de los diferentes métodos de diseño explicados en la carrera.

Respecto al uso de medios de enseñanza se emplearán el pizarrón y el retroproyector con un conjunto de láminas en las cuales deben aparecer las fórmulas y resultados fundamentales del ejemplo que se explicará.

Este contenido tiene gran importancia su tratamiento por dos razones fundamentales:

1. La introducción de nuestras clases de un resultado científico reciente, aplicado además en el diseño de cimentaciones.
2. Permite resumir en un problema aplicado varios conceptos de la teoría de las probabilidades estudiados.

Como indicaciones metodológicas a seguir en esta clase planteamos comenzar con el planteamiento del problema del diseño de las cimentaciones por deformación utilizando el método de los Estados Límites y por la Teoría de la Seguridad. Los contenidos a tratar aparecen publicados en la revista *Ingeniería Estructural*, Vol. IX, N° 1, 1988.

### **Conferencia #3 del tema:**

*Pruebas paramétricas para la comparación de dos poblaciones.*

#### **Sumario:**

1. Conceptos preliminares.
2. Comparación de Varianzas.
3. Comparación de medias.

#### **Objetivos**

1. Reconocer la necesidad de comparar dos poblaciones como elemento necesario en el estudio estadístico en problemas de la especialidad.
2. Valorar los pasos a seguir en la realización de la dócima de hipótesis y la relación del resultado estadístico de la prueba con el problema planteado.

Para el desarrollo de esta actividad docente se debe tener en cuenta que en primer año se estudiaron los conceptos relacionados con la definición de las hipótesis  $H_0$  y  $H_1$  con los errores tipo I y tipo II y la probabilidad de cometerlos:  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente. Estos deben recordarse y al mismo tiempo dar los pasos necesarios para la realización de una dócima de hipótesis. En el planteamiento de las hipótesis a contrastar es importante

destacar que ellas están en función del problema en estudio y de ellas depende en gran medida la valoración que realizaremos del resultado estadístico.

La clase puede ser abordada de forma problémica y en búsqueda de la solución a un problema planteado con el auxilio del libro de tablas estadísticas podemos hacer las valoraciones de los distintos casos posibles.

Esos resultados podemos orientar que sean resumidos en un tarjeta de estudio donde se dan algunos elementos para completarla. Por ejemplo:

	Hipótesis $H_0$	Estadígrafo	Región Crítica
$\sigma_1^2$ y $\sigma_2^2$ conocidas	$\mu_1 = \mu_2$		
$\sigma_1^2$ y $\sigma_2^2$ desconocidas No se rechaza $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$\mu_1 \geq \mu_2$		
$\sigma_1^2$ y $\sigma_2^2$ desconocidas Se rechaza $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$\mu_1 \leq \mu_2$		

De manera análoga se puede plantear una con la comparación de varianzas. Estas tarjetas se pueden confeccionar en láminas y llenarlas en clase o pueden orientarse de estudio independiente. Puede orientarse también la búsqueda de problemas de la especialidad donde aplicar estas pruebas para una discusión de los mismos en clase práctica.

#### Conferencia #4 del tema:

*Pruebas no paramétricas para la comparación de dos o más poblaciones.*

#### Sumario:

1. Conceptos preliminares.
2. Pruebas para la comparación de dos poblaciones: la prueba de White y la prueba de Wilcoxon.
3. Prueba de Kruskal-Wallis.

#### Objetivos

1. Plantear las características fundamentales de las pruebas no paramétricas.



2. Identificar las características de los problemas a los cuales se les puede aplicar una de las pruebas para la comparación de dos poblaciones.
3. Conocer las características de la prueba de Kruskal-Wallis y los posibles problemas de aplicación.

El contenido a tratar en esta clase resulta interesante porqu resultan estas pruebas una alternativa a emplear en el estudio de nuevos materiales de construcción en los que no se haya realizado un estudio profundo para poder caracterizar las variables aleatorias asociadas a sus características con un función de distribución de probabilidades y poder hacer inferencias estadísticas. Al revisar la bibliografía especializada en esta temática resalta que escasean los problemas aplicados a la Ingeniería Civil. En un análisis de las características de las pruebas señaladas en la clase se puede reconocer su aplicabilidad. No debe pasar por alto que estas pruebas son menos potentes que las paramétricas, pero esta limitante no debe frenar su empleo. En estas pruebas es esencial la definición de las hipótesis nula y la alternativas y como ocurre en toda dócima es clave la interpretación del resultado estadístico alcanzado en la prueba.

### 3 Clases prácticas del tema

Planteamos la realización de dos clases en las cuales se abordarán las valoraciones técnicas asociadas a las conclusiones estadísticas que resulten de la solución de los problemas.

Una tercera clase práctica en la computadora donde se familiariza al estudiante con un software (por ejemplo STATGRAF, STATISTICA o cualquier otro) que será utilizado en los temas siguientes de la asignatura. Aquí se debe valorar la forma en que el software resuelve la prueba de hipótesis y la diferencia con el procedimiento utilizado en el aula.

Como conclusión del tema la última actividad será de una evaluación parcial y al inición de la actividad se puede realizar un examen del tema donde se destaque los aspectos estudiados y su vinculación con la especialidad.

### 4 Conclusiones

Para desarrollar las clases de este primer tema de la asignatura “Estadística y Diseño de Experimentos” consideramos que debemos dar el enfoque matemático

que requiere y destacar el uso de los contenidos impartidos en el ejercicio de la profesión. No debemos perder de vista que esta asignatura en la encargada de concluir la disciplina Matemática y todos los contenidos que se puedan vincular con las restantes asignaturas de la disciplina no deben pasar por alto. El tiempo dedicado a este tema es la tercera parte del total de horas de la asignatura.

Resulta conveniente potenciar la actividad individual de los estudiantes con la realización de tareas, ejercicios, proyectos o actividades de otra índole que aumenten la actividad práctica del tratamiento de los contenidos de la asignatura y con vistas a realizar un aprendizaje más activo es necesario elevar la motivación de los estudiantes por los estudios de su carrera y en particular también hacia la asignatura de Matemática a través del vínculo con los problemas de la especialidad propender a la realización de actividades grupales en que se le de cumplimiento a objetivos educativos o habilidades profesionales generales que el estudiante debe alcanzar tales como: el trabajo en grupo, el desarrollo de la capacidad de expresión oral y escrita, entre otras.

En la resolución de problemas es necesario ampliar las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes mediante una mayor cantidad y diversidad de propuestas de problemas y ejercicios a desarrollar por estos como parte de su trabajo independiente, así como prestar especial atención al riguroso trabajo de calificación y corrección individual del aprendizaje que deben realizar los profesores asociado a este incremento de las componentes independientes del aprendizaje de los alumnos.

## Referencias

- [1] Calderón, R. (1996) Tesis presentada en opción al título de Doctor en Ciencias Pedagógicas.
- [2] Colectivo de autores (1990) *Plan de Estudio de la Disciplina de Matemática de la Carrera de Ingeniería Civil*.
- [3] Scull, J. (1995) Tesis presentada en opción al título de Master en Ciencias de la Educación.
- [4] González, O. (1991) *El Enfoque Histórico Cultural como Fundamento de una Concepción Pedagógica*. Tendencias Pedagógicas Contemporáneas. Impreso por el MES, La Habana.

## ESTADÍSTICA EN EL NIVEL PRIMARIO Y SU RELACIÓN CON LAS DEMÁS ÁREAS DEL CONOCIMIENTO

ROXANA YUDEWITZ DE MIODOWSY \* – MYRIAM HERRERA DE ROJAS †

---

### Resumen

La finalidad de nuestro trabajo es presentar algunos aspectos que todo maestro debe conocer en materia de Estadística. No se trata de hacer del maestro un experto en Estadística; se trata de reconocer que en la poca actual debemos pensar eficazmente, desempeñarnos con dignidad y cierta competencia en nuestras funciones de ciudadanos.

Nuestra cultura tiene un grado sorprendente de componentes estadísticos, por lo tanto, se debe observar, se debe ordenar, resumir e interpretar la información que nos llega a través de muchos medios. Diariamente debemos tomar alguna decisión sobre algún aspecto de nuestra vida y es entonces cuando vemos que tiene sentido esforzarnos por llegar a conocer ciertas cosas respecto de la naturaleza del pensamiento estadístico.

### Referencias

- [1] Canavos, G. C. *Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y Métodos*.

---

\*Bo. Natania R, Casa 8, Manzana B, Capital, San Juan, Argentina C.P. 5400; Fax: 064-219686.

†Bo. Natania VI, Casa 7, Manzana B, Rivadavia, San Juan, Argentina, C.P. 5400

- [2] Wayne, D. *Estadística con Aplicaciones a las Ciencias Sociales y a la Educación*.
- [3] Freund, J.; Smith, R. *Estadística*.
- [4] Santaló, L. *Seorita; ¿Qu es la Estadística?*.

## HAGAMOS MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA A PARTIR DEL MÉTODO OCRESO

GERARDO ARAYA AGUILAR \*– PABLO MENA CASTILLO\*

---

### Resumen

Nuestra experiencia a través de los años muestra una floración de los problemas en los conocimientos de la matemática por parte de los docentes de primaria y secundaria. A la mayor parte de maestras y maestros de nuestro país no les gusta la matemática y en los cursos que llevan en la universidad no aprenden a desarrollar un veraz y duradero gusto por ella. Por el contrario, sus opiniones van desde "nunca la entendí por eso estudie educación", hasta "Yo lo que hago es escribir en la pizarra lo que viene en el programa, eso me parece que está escrito en otro idioma"; esta actitud promulga un manejo elemental de conocimientos matemáticos.

Pero esta situación no es grave por sí sola. Si una persona no quiere hacer un esfuerzo por aprender y especialmente, por entender matemática, es problema de ella. Lo verdaderamente considerable es cuando su displicencia es transmitida a personitas con grandes deseos de aprender, enormes receptores, no sólo de información, sino de cualquier sentimiento o gusto por las cosas o por lo que realizan. Este sin sabor por la matemática plantea toda una coyuntura adversa para aprender estadística.

Ante estos acontecimientos poco favorables, nace la siguiente interrogante: Cómo alcanzar, en primera instancia en docentes y posteriormente en estudiantes, de primaria y secundaria e inclusive universitarios, un elevado índice de satisfacción y afecto por los conocimientos

---

\*Sede de Occidente, Universidad de Costa Rica, San Ramón, Costa Rica

matemáticos y estadísticos? La respuesta, buscada infructuosamente por muchos académicos interesados en el porvenir de nuestra educación durante varios años de esfuerzo y trabajo, no ha sido determinada y clarificada con exactitud.

En el presente trabajo, nosotros brindamos una solución a este problema. Ella nace desde el seno de nuestro compromiso y amor por la patria, la cual nos ha dado tanto, y escasa retribución le hemos brindado. Nuestras reflexiones dieron a luz a OCRESO, el cual es un método viable para superar la condición mental de subdesarrollo que se traslada a la matemática y en especial, a la estadística. Vemos en OCRESO un excelente camino hacia la gran meta de conocer, entender, aprender y enseñar la matemática y estadística que nuestro país urge.

A futuro y con todo lo realizado en el pasado y en el presente se puede tomarse a OCRESO como un método, el cual permite desarrollar la creatividad, la originalidad y toma de decisiones en las personas. él es abierto a circunstancias diversas y es un método digno de aprenderse. Por su carácter esencial y sencillo, nos brinda la posibilidad de emplearlo en casi todo, y en la mayoría de los casos, numerosas personas lo emplean inconscientemente. Hoy en día, la computación posee mucho de OCRESO y además, él contribuye a estimular en el ser humano el su capacidad potencial de pensar. OCRESO es una excelente herramienta para mejorar nuestro sistema de vida y nos ayuda a ser más cultos, más sabios y a procesar y manejar mayor grado de información con mucha facilidad.